Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

М. Г. Некрасова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2013

УДК 510.22(07)
ББК 22.174я7
Н48

Рецензенты:

С. Б. Вениг, д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета нано- и биомедицинских технологий, зав. кафедрой материаловедения, технологии и управления качеством ФГБОУ ВПО НИУ «Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского»;
кафедра информационных систем, компьютерных технологий и физики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет», зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доцент М. А. Савунов

Некрасова, М. Г.
Н48 Дискретная математика : учеб. пособие : в 2 ч. / М. Г. Некрасова. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2013.
ISBN 978-5-7765-1064-9
Ч. 1 : Начальные понятия теории множеств и отношений, математическая логика / М. Г. Некрасова. – 148 с.
ISBN 978-5-7765-1048-9

В учебном пособии изложены основные понятия теории множеств, правила и примеры построения диаграмм Эйлера-Венна, операции над множествами; даны понятие отношений, свойства бинарных отношений, понятие и типы функций.

Рассмотрены понятия высказываний и операции над ними, аналитический и конструктивный методы проверки равносильности высказываний, построение нормальных форм формул логики высказываний, исчисление высказываний. Даны понятие и способы задания булевых функций, способы минимизации, функционально-замкнутые классы булевых функций, производная булевой функции первого порядка, основные понятия и классификации предикатов и формул логики предикатов, процедуры навешивания кванторов, интерпретации формул логики предикатов.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений 080500.62 – «Бизнес-информатика», 230700.62 – «Прикладная информатика» и специальности 080101.65 – «Экономическая безопасность».

УДК 510.22(07)
ББК 22.174я7

ISBN 978-5-7765-1048-9 (ч. 1)
ISBN 978-5-7765-1064-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие по курсу «Дискретная математика» состоит из двух частей. В первой части рассмотрены элементы теории множеств и отношений, математическая логика. Во второй части рассматриваются теория графов, элементы теории конечных автоматов.

В разделе «Элементы теории множеств и отношений» рассмотрены основные понятия теории множеств, правила и примеры построения диаграмм Эйлера-Венна, операции над множествами; даны понятие отношений, свойства бинарных отношений, понятие и типы функций.

В разделе «Математическая логика» весь материал разбит на три подраздела: логика высказываний, булевы функции, логика предикатов. В подразделе «Логика высказываний» рассмотрены понятия высказываний и операции над ними, аналитический и конструктивный методы проверки равносильности высказываний, построение нормальных форм формул логики высказываний, исчисление высказываний. В подразделе «Булевы функции» даны понятие и способы задания булевых функций, способы минимизации, функционально-замкнутые классы булевых функций, производная булевой функции первого порядка. В подразделе «Логика предикатов» даны основные понятия и классификации предикатов и формул логики предикатов, процедуры навешивания кванторов, интерпретации формул логики предикатов.

В рамках курса проходит знакомство с новыми средствами конструктивного анализа и моделирования в управлении – методами формального представления реальных управленческих ситуаций, процессов, систем. Поскольку пособие рассчитано на студентов направлений «Бизнес-информатика», «Прикладная информатика (в экономике)», «Экономическая безопасность», то упор сделан на постановку и решение прикладных задач. Для обеспечения эффективной самостоятельной работы студентов пособие дополнено практическими задачами и примерами, для каждого из изучаемых разделов автором разработаны тестовые материалы, содержащие вопросы как теоретического, так и практического характера, которые помогут студентам изучить дисциплину в самостоятельном режиме работы.

По программе курса выполняются проверочные работы по каждому разделу. Проверочные работы могут быть проведены в форме теста (в соответствии с рабочей программой дисциплины). После изучения всей дисциплины студенты защищают выполненное расчетно-графическое задание. Из тестовых вопросов составляется итоговый тест по всему курсу «Дискретная математика».

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика – самостоятельное направление современной математики. Она изучает математические модели объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, с которыми имеют дело в технике, информатике и других областях знаний.

Дискретная математика, или дискретный анализ – область математики, которая занимается исследованием структур и задач на конечных множествах. Поэтому в качестве синонима иногда используется термин «конечная математика». Можно считать общепринятым деление математики на непрерывную и дискретную. Последняя представляет собой важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности. Поэтому для задач дискретной математики обычные средства классического анализа являются вспомогательными.

Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения, и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная математика.

При исследовании, анализе и решении управленческих проблем, моделировании объектов исследования и анализа широко используются дискретные методы формализованного представления, являющиеся предметом рассмотрения в дискретной математике.

Математическая логика – современный вид формальной логики, т.е. науки, изучающей умозаключения с точки зрения их формального строения.

Вплоть до начала XIX в. формальная логика практически не выходила за рамки силлогических умозаключений. Однако начиная с работ Дж. Буля можно говорить о превращении ее в математическую логику. Особенности математической логики заключаются в ее математическом аппарате, в преимущественном внимании к умозаключениям, применяемым в самой математике.

Математическая логика – это обширная наука, которая кроме традиционной проблематики занимается вопросами оснований математики и теории алгоритмов и имеет целый ряд приложений.

1. МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

1.1. Элементы и множества

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов». Философам давно ясно, что мир – единое неразрывное целое и выделение в нем объектов – это не более чем произвольный акт нашего мышления, позволяющий сформировать доступную для рационального анализа картину. Но как бы там ни было, выделение объектов и их совокупностей – естественный способ организации нашего мышления, поэтому не удивительно, что он лежит в основе главного инструмента описания точного знания – математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. О множестве известно как минимум то, что оно состоит из элементов.

Определение 1.1. *Под* ***множеством*** *S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются* ***элементами множества*** *S.*

Определение 1.2. *Под множеством понимают объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого ими множества.*

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, …), а элементы множеств – строчными буквами (a, b, c,...).

Если объект x является элементом множества M, то говорят, что *x принадлежит M*: $x \in M$. В противном случае говорят, что *x не принадлежит M*: $x \notin M$.

В этом интуитивном определении, принадлежащем немецкому математику Г. Кантору, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые могут входить во множество, то относительно них существует значительная свобода. Это может быть множество студентов, присутствующих на лекции, множество четных чисел и т.д.

Определение 1.3. *Множество A называется* ***подмножеством*** *множества B, если всякий элемент из A является элементом B. Если A является подмножеством B и B не является подмножеством A, то говорят, что A является* ***строгим (собственным) подмножеством*** *B.*

В первом случае обозначают $A \subseteq B$, во втором случае $A \subset B$.

Определение 1.4. *Множество, не содержащее элементов, называется* ***пустым*** *$\varnothing$, оно является подмножеством любого множества. Множество U называется* ***универсальным****, т.е. все рассматриваемые множества являются его подмножеством.*

Рассмотрим два определения равенства множеств.

Определение 1.5. ***Множества*** *A и B считаются* ***равными****, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут $A = B$; $A \neq B$ – в противном случае.*

Определение 1.6. ***Множества*** *A и B считаются* ***равными****, если $A \subset B$ и $B \subset A$.*

Способы задания множеств:

– ***перечислением элементов****: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, т.е. списком своих элементов;*

– ***характеристическим предикатом****: $M = \{x \mid P(x)\}$ (описанием характеристических свойств, которыми должны обладать его элементы);*

– ***порождающей процедурой****: $M = \{ x \mid x = f\}$, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры, например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки.*

Примечание. При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми. Перечислением можно задавать только ***конечные множества*** (число элементов множества конечно, в противном случае множество называется бесконечным). Характеристический предикат – это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит. Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества. ***Бесконечные множества*** задаются характеристическим предикатом или порождающей процедурой.

Пример 1.1.

1) $M = \{1, 2, 3, 4\}$ – перечисление элементов множества.

2) $M = \{m \mid m \in N \text{ и } m \leq 10\}$ – характеристический предикат.

3) Числа Фибоначчи задаются условиями (порождающей процедурой):

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ для } n > 2.$$

Определение 1.7. ***Мощность*** *конечного множества A – это число его элементов.*

Мощность множества обозначают $|A|$.

Пример 1.2. $|\varnothing| = 0$, $|\{\varnothing\}| = 1$.

Определение 1.8. *Множества называются* ***равномощными****, если их мощности совпадают.*

Определение 1.9. Множество всех подмножеств множества A называется ***булеаном*** $P(A)$.

Известно, что если множество A содержит n элементов, то множество $P(A)$ содержит 2^n элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества A в виде 2^A.

Пример 1.3.

$A = \{0, 1, 2\}$, $P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

1.2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна

Диаграммы Эйлера-Венна – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри него – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, мы можем заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств. Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

Определение 1.10. ***Объединением*** *множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B* (рис. 1.1, *а*):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Определение 1.11. ***Пересечением*** *множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B* (рис. 1.1, *б*):

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Определение 1.12. ***Разностью*** *множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся во множестве B* (рис. 1.1, *в*):

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

а)

б)

в)

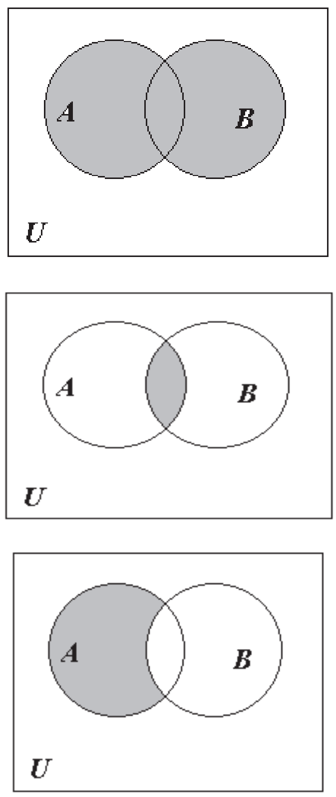


Рис. 1.1

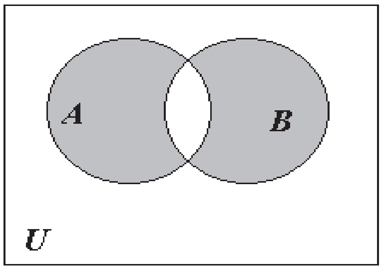
Определение 1.13. ***Симметрической разностью*** *множеств A и B называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству A, либо только множеству B* (рис. 1.2, *а*):

$$A + B = \{x \mid \text{либо } x \in A, \text{ либо } x \in B\}.$$

Определение 1.14. ***Абсолютным дополнением*** *множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству A* (рис. 1.2, *б*):

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

а)



б)

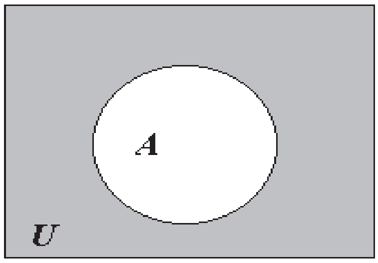


Рис. 1.2

Пример 1.4. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проиллюстрируем справедливость соотношения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (рис. 1.3).

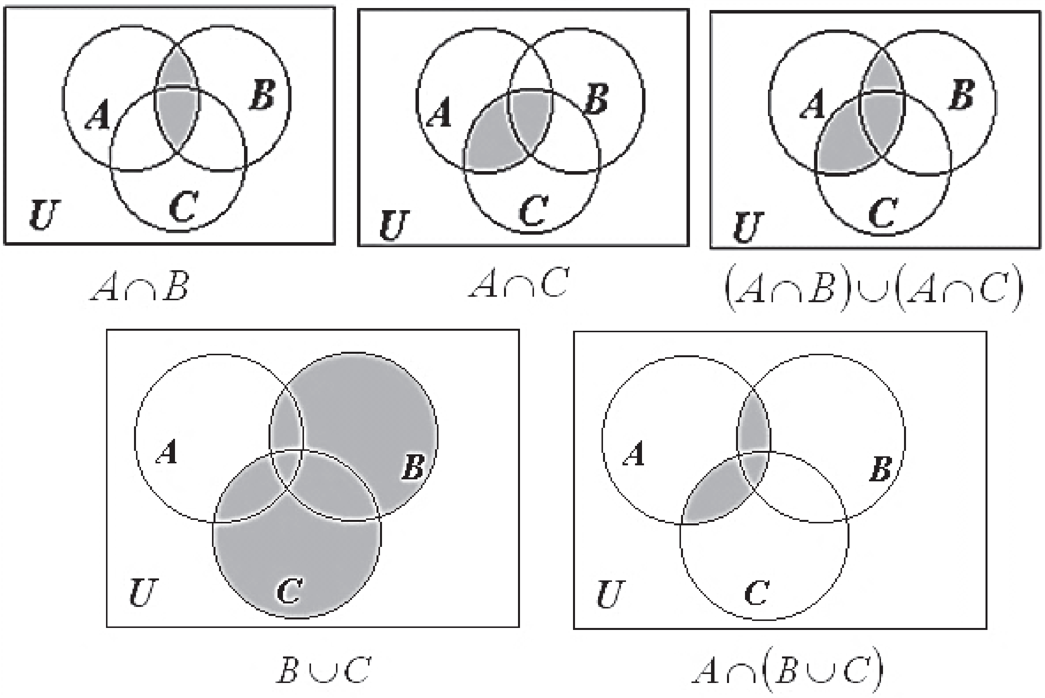


Рис. 1.3

Убеждаемся, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное соотношение справедливо.

1.3. Основные тождества алгебры множеств

Для произвольных множеств A, B, и C справедливы следующие соотношения (табл. 1.1).

Таблица 1.1

1. Коммутативность объединения $$A \cup B = B \cup A$$	1′. Коммутативность пересечения $$A \cap B = B \cap A$$
2. Ассоциативность объединения $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$	2′. Ассоциативность пересечения $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$	3′. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $$A \cup \varnothing = A$$ $$A \cup \overline{A} = U$$ $$A \cup U = U$$	4′. Законы действия с пустым и универсальным множествами $$A \cap U = A$$ $$A \cap \overline{A} = \varnothing$$ $$A \cap \varnothing = \varnothing$$
5. Закон идемпотентности объединения $$A \cup A = A$$	5′. Закон идемпотентности пересечения $$A \cap A = A$$
6. Закон де Моргана $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$	6′. Закон де Моргана $$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
7. Закон поглощения $$A \cup (A \cap B) = A$$	7′. Закон поглощения $$A \cap (A \cup B) = A$$
8. Закон склеивания $$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$	8′. Закон склеивания $$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$$
9. Закон Порецкого $$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$$	9′. Закон Порецкого $$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$$
10. Закон двойного дополнения $$\overline{\overline{A}} = A$$	

Пример 1.5.

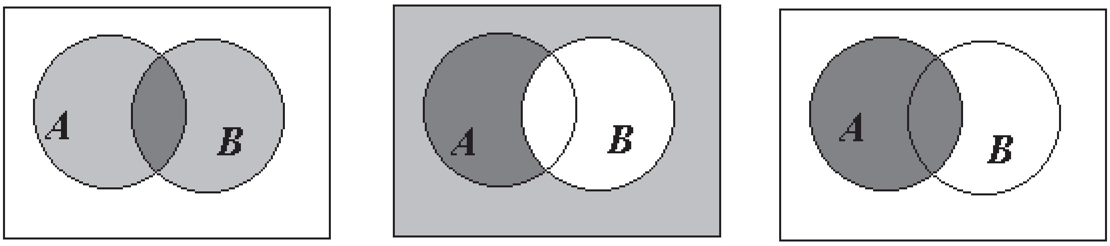
Доказать следующее тождество: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Решение.

Докажем это тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна).

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=(A\cup(A\cap\overline{B}))\cap(B\cup(A\cap\overline{B}))=A\cap((B\cup A)\cap(B\cup\overline{B}))=$$
$$=A\cap((B\cup A)\cap U)=A\cap(B\cup A)=A.$$

Построим соответствующие диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1.4).



$A\cap B$ $\qquad$ $A\cap\overline{B}$ $\qquad$ $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$

Рис. 1.4

Пример 1.6.

Даны множества A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, C = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, D = {2, 3, 4, 5, 6}.

Задайте списками множества:

1) $A\cup B\cup C\cup D$;
2) $A\cap B\cap C\cap D$;
3) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$;
4) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$;
5) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Решение:

Для упрощения решения задачи, нанесем элементы исходных множеств на числовую прямую (рис. 1.5).

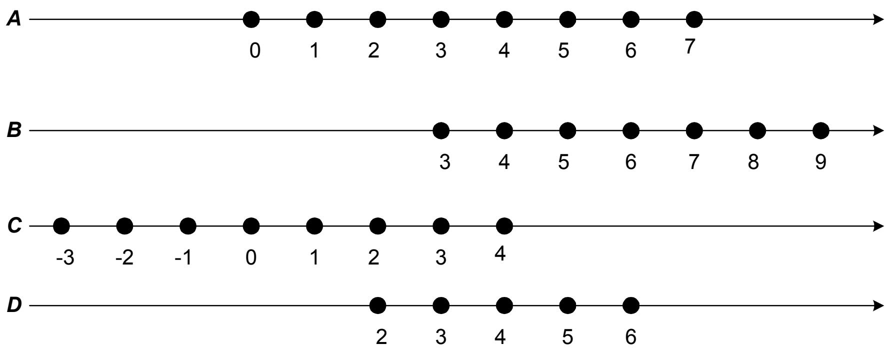


Рис. 1.5

1) $A\cup B\cup C\cup D$ = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
2) $A\cap B\cap C\cap D$ = {3, 4};
3) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$ = {3, 4, 5, 6, 7}$\cup${2, 3, 4} = {2, 3, 4, 5, 6, 7};

4) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} =$
$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

5) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{0, 1, 2\} \cup \{0, 1, 2, 8, 9\} = \{0, 1, 2, 8, 9\}$.

Пример 1.7.

Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский – 28, немецкий – 30, французский – 42, испанский и немецкий – 8, испанский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка – 3.

Ответьте на вопросы:

1) Сколько студентов не изучает ни одного языка?
2) Сколько студентов изучает один французский язык?

Решение:

Введем обозначения: множество студентов, изучающих немецкий язык – Н, французский – Ф, испанский – И.

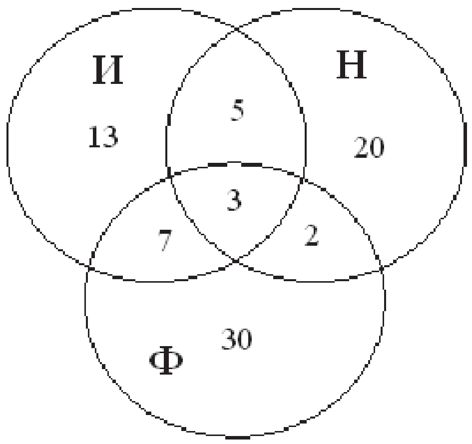


Рис. 1.6

Изображаем множества на диаграмме Эйлера-Венна в наиболее общем виде (рис. 1.6).

Рассуждаем следующим образом: все три языка изучают 3 студента. Значит, одновременно изучают только немецкий и французский $5 - 3 = 2$, одновременно изучают только немецкий и испанский $8 - 3 = 5$, одновременно изучают только французский и испанский $10 - 3 = 7$.

Поскольку всего 28 студентов изучают испанский, то число студентов изучающих только испанский язык $28 - 3 - 7 - 5 = 13$. Аналогично находим число студентов изучающих только немецкий язык $30 - 3 - 2 - 5 = 20$, число студентов изучающих только французский язык $42 - 3 - 7 - 2 = 30$. Находим число студентов, изучающих иностранные языки $13 + 20 + 30 + 3 + 5 + 7 + 2 = 80$. Таким образом, число студентов не изучающих язык, $100 - 80 = 20$.

Ответ: 20 студентов не изучает ни одного языка, 30 студентов изучает один французский язык.

Пример 1.8.

С использованием диаграмм Эйлера-Венна доказать тождества:

1) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;
2) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;
3) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Решение:

1) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

Строим пошагово диаграммы Эйлера-Венна.

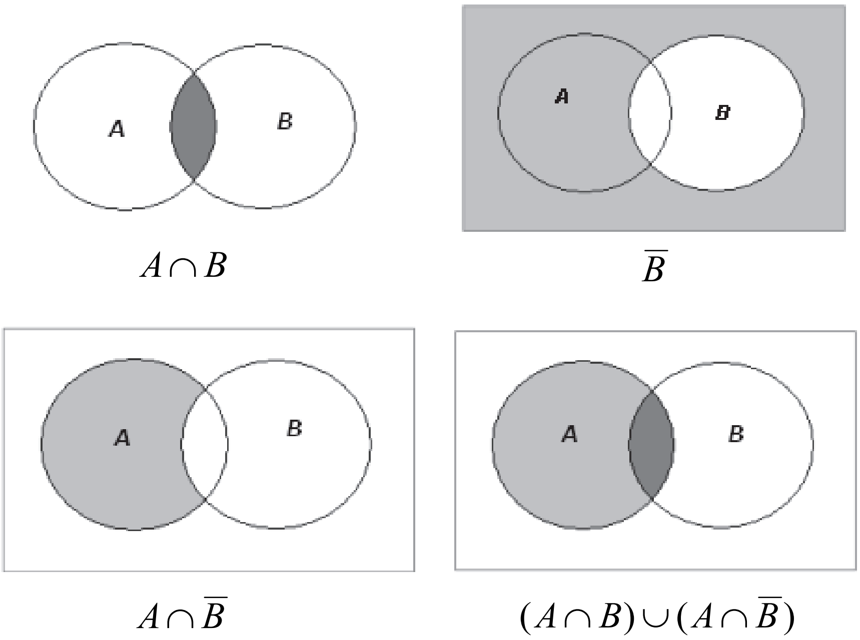


Рис. 1.7

Сначала построим диаграммы для первого выражения $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Штрихуем области, соответствующие операциям над множествами (рис. 1.7). В результате получаем множество A.

Строим пошагово диаграммы для второго выражения $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ (рис. 1.8).

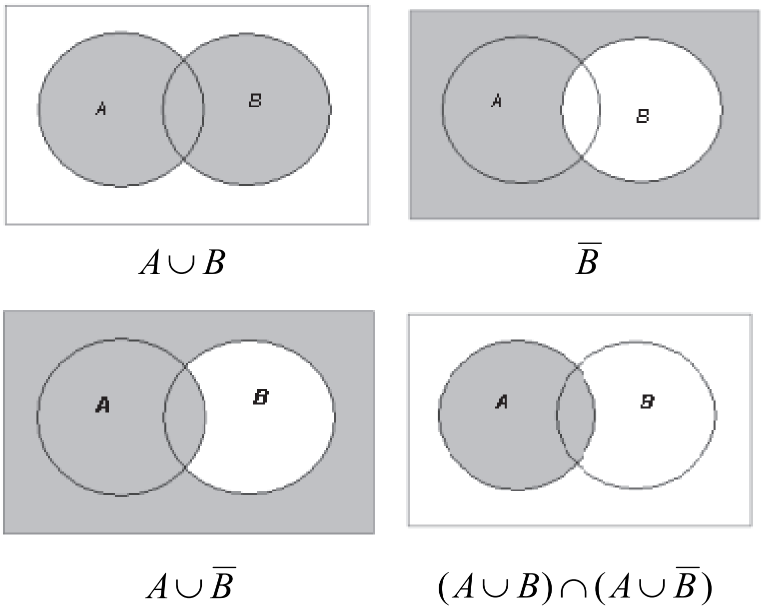


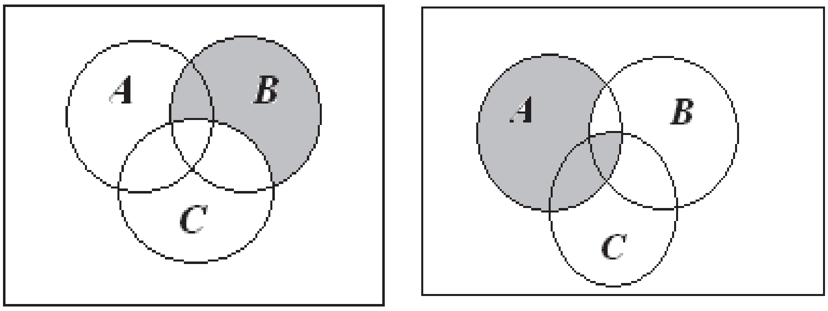
Рис. 1.8

Аналогично находим, что в результате получили множество A.

2) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B)\cup(A\cap C)$.

Поскольку в выражении фигурируют три множества (A, B, C), то на всех диаграммах изображаем все три множества в наиболее общем виде.

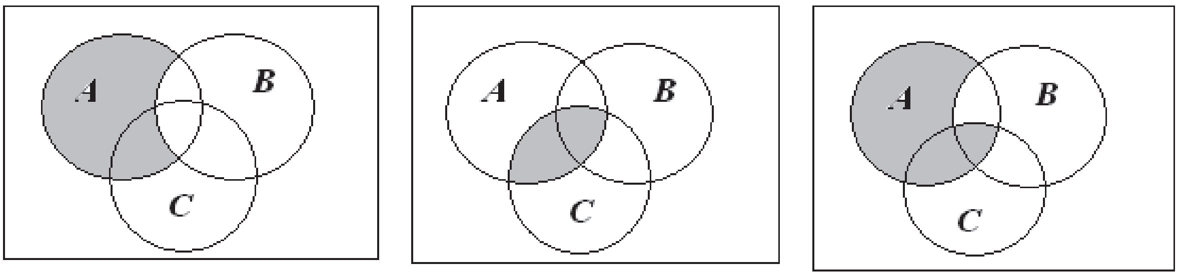
Пошагово строим диаграммы для первого выражения $A\backslash(B\backslash C)$ (рис. 1.9).



$B\backslash C$ $\qquad$ $A\backslash(B\backslash C)$

Рис. 1.9

Пошагово строим диаграммы для второго выражения $(A\backslash B)\cup(A\cap C)$ (рис. 1.10). Видим, что результат построения диаграмм Эйлера-Венна для обоих выражений совпадает.



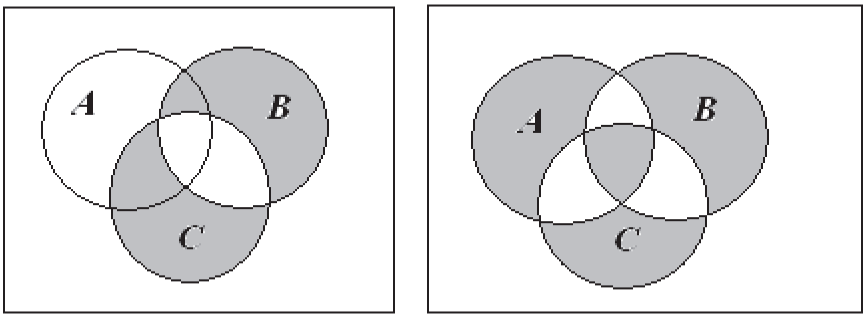
$A\backslash B$ $\qquad$ $A\cap C$ $\qquad$ $(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

Рис. 1.10

3) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Поскольку в выражении фигурируют три множества (A, B, C), то на всех диаграммах изображаем все три множества в наиболее общем виде.

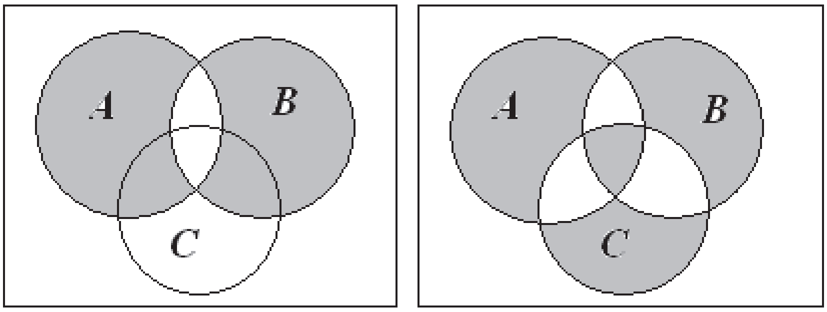
Пошагово строим диаграммы для первого выражения $A + (B + C)$ (рис. 1.11).



$B + C$ $\qquad$ $A + (B + C)$

Рис. 1.11

Пошагово строим диаграммы для второго выражения $(A + B) + C$ (рис. 1.12).



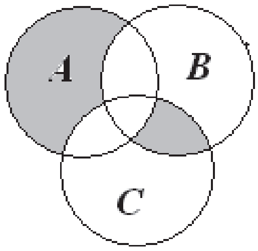
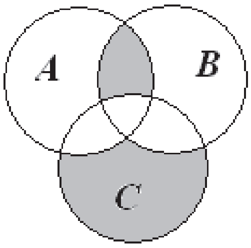
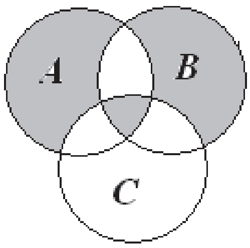
$A + B$ $\qquad$ $(A + B) + C$

Рис. 1.12

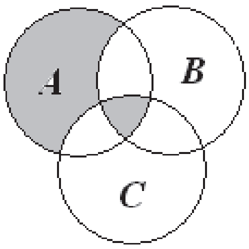
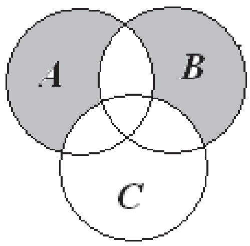
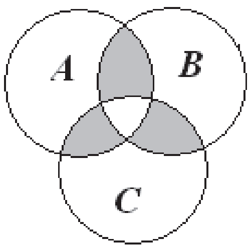
Видим, что результат построения диаграмм Эйлера-Венна для обоих выражений совпадает.

1.4. Проверочный тест по теме «Теория множеств»

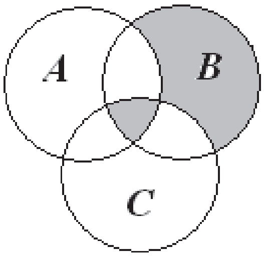
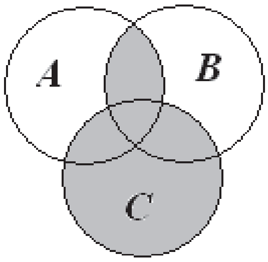
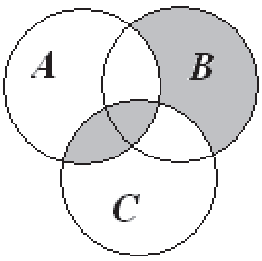
Вопрос 1. Установите соответствие между аналитической записью и диаграммой Эйлера-Венна.

1) 	а) $((A \setminus B)\setminus C)\cup((B\cap C)\setminus A)$
2) 	б) $((C \setminus B)\setminus A)\cup((B\cap A)\setminus C)$
3) 	в) $((B \setminus A)\setminus C)\cup((A\setminus B)\setminus C)\cup(B\cap C\cap A)$

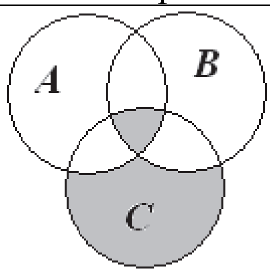
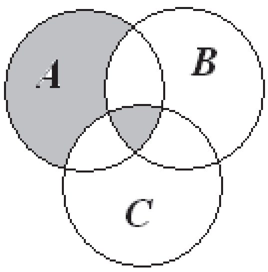
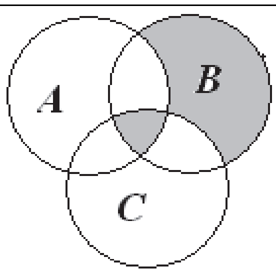
Вопрос 2. Установите соответствие между аналитической записью и диаграммой Эйлера-Венна.

1) 	а) $((A \setminus B)\setminus C)\cup(A\cap B\cap C)$
2) 	б) $((A \setminus B)\setminus C)\cup((B\setminus C)\setminus A)$
3) 	в) $((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\setminus(A\cap B\cap C)$

Вопрос 3. Установите соответствие между аналитической записью и диаграммой Эйлера-Венна.

1) 	а) $((B \setminus A) \setminus C) \cup (B \cap C \cap A)$
2) 	б) $(A \cap B) \cup C$
3) 	в) $((B \setminus A) \setminus C) \cup (C \cap A)$

Вопрос 4. Установите соответствие между аналитической записью и диаграммой Эйлера-Венна.

1) 	а) $((C \setminus A) \setminus B) \cup (B \cap C \cap A)$
2) 	б) $((A \setminus B) \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$
3) 	в) $((B \setminus A) \setminus C) \cup (B \cap C \cap A)$

Вопрос 5. Чему равна мощность булеана множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

Вопрос 6. Чему равна мощность булеана множества $A = \{3, 4\}$?

Вопрос 7. Чему равна мощность булеана множества $A = \{1, 2, 4\}$?

Вопрос 8. Чему равна мощность булеана множества $A = \{1\}$?

Вопрос 9. Чему равна мощность булеана множества $A = \{a, b, c, d\}$?

Вопрос 10. Чему равна мощность булеана множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Вопрос 11. Чему равна мощность булеана множества $A = \{a\}$?

Вопрос 12. Чему равна мощность булеана множества $A = \{d, f, t\}$?

Вопрос 13. Чему равна мощность булеана множества $A = \{x, y\}$?

Вопрос 14. Чему равна мощность булеана множества $A = \varnothing$?

Вопрос 15. Запишите множество $M = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$, если
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
$B = \{3, 4, 7, 8, 9, 10\}$;
$C = \{0, 4, 5, 6, 9, 10\}$;
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Вопрос 16. Запишите множество $M = (\overline{A} \setminus B) \cup (B \setminus C)$, если
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
$B = \{3, 4, 7, 8, 9, 10\}$;
$C = \{0, 4, 5, 6, 9, 10\}$;
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Вопрос 17. Запишите множество $M = (B \cup C) \cap (\overline{A \cap C})$, если
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
$B = \{3, 4, 7, 8, 9, 10\}$;
$C = \{0, 4, 5, 6, 9, 10\}$;
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Вопрос 18. Запишите множество $M = (A \setminus \overline{B}) \cap (A \cup C)$, если
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
$B = \{3, 4, 7, 8, 9, 10\}$;
$C = \{0, 4, 5, 6, 9, 10\}$;
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Вопрос 19. Запишите множество $M=(A\setminus B)\cup(A\cap C\cap B)$, если
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
B = {3, 4, 7, 8, 9, 10};
C = {0, 4, 5, 6, 9, 10};
U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Вопрос 20. Запишите множество $M=(A\setminus B)\setminus(\overline{A}\cap C)$, если
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
B = {3, 4, 7, 8, 9, 10};
C = {0, 4, 5, 6, 9, 10};
U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Вопрос 21. Запишите множество $M=(B\cap C)\setminus\overline{(C\setminus A)}$, если
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
B = {3, 4, 7, 8, 9, 10};
C = {0, 4, 5, 6, 9, 10};
U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Вопрос 22. Запишите множество $M=(B\cup A\cup C)\setminus(\overline{A}\cap C)$, если
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
B = {3, 4, 7, 8, 9, 10};
C = {0, 4, 5, 6, 9, 10};
U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Вопрос 23. Запишите множество $M=\overline{(A\setminus B)}\cup(A\cap C)$, если
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
B = {3, 4, 7, 8, 9, 10};
C = {0, 4, 5, 6, 9, 10};
U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Вопрос 24. Запишите множество $M=(A\setminus\overline{B})\cap(A\cup C\cup B)$, если
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
B = {3, 4, 7, 8, 9, 10};
C = {0, 4, 5, 6, 9, 10};
U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Вопрос 25. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $A\cup B=$	а) $=B\cup A$
2) $A\cup\varnothing=$	б) $=A$
3) $A\cup\overline{A}=$	в) $=U$

Вопрос 26. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $A \cup (B \cup C) =$	а) $= (A \cup B) \cup C$
2) $A \cap U =$	б) $= A$
3) $A \cup U =$	в) $= U$

Вопрос 27. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $A \cap (B \cup C) =$	а) $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $A \cap \overline{A} =$	б) $= \varnothing$
3) $A \cup A =$	в) $= A$

Вопрос 28. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $A \cap \varnothing =$	а) $= \varnothing$
2) $\overline{A \cup B} =$	б) $= \overline{A} \cap \overline{B}$
3) $A \cup (A \cap B) =$	в) $= A$

Вопрос 29. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $\overline{A \cap B} =$	а) $= \overline{A} \cup \overline{B}$
2) $A \cap (A \cup B) =$	б) $= A$
3) $A \cap B =$	в) $= B \cap A$

Вопрос 30. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) =$	а) $= A$
2) $A \cap (B \cap C) =$	б) $= (A \cap B) \cap C$
3) $A \cup B =$	в) $= B \cup A$

Вопрос 31. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $\overline{\overline{A}} =$	а) $= A$
2) $A \cap (B \cup C) =$	б) $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3) $A \cup \overline{A} =$	в) $= U$

Вопрос 32. Установите соответствие между аналитическими записями.

1) $\overline{A \cap B} =$	а) $= \overline{A} \cap \overline{B}$
2) $A \cup \varnothing = A$	б) $= A$
3) $A \cup \overline{A} =$	в) $= U$

Вопрос 33. Как называется множество, не содержащее ни одного элемента?

а) нулевое;
б) пустое;
в) не является множеством.

Вопрос 34. Укажите, какое из следующих утверждений справедливо.

а) $0 \in \varnothing$.

б) $\varnothing = \{0\}$.

в) $|\{\varnothing\}| = 0$.

г) $|\varnothing| = 0$.

Вопрос 35. Два множества, содержащие одинаковое число элементов, являются:

а) равными;

б) равноправными;

в) равномощными.

Вопрос 36. Если каждый элемент множества A содержится во множестве B, то множество A называется:

а) подмножеством множества B;

б) внутренним множеством множества B;

в) принадлежащим множеству B.

Вопрос 37. Булеаном множества называется:

а) множество всех возможных подмножеств исходного множества;

б) множество, содержащее в себе все возможные множества;

в) множество, каждый элемент которого содержится в другом множестве.

Вопрос 38. Способ, которым можно задать только конечные множества:

а) характеристический предикат;

б) порождающая процедура;

в) перечисление.

Вопрос 39. Чему равна мощность множества $A = \{1, 2, 3\}$?

Вопрос 40. Чему равна мощность множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Вопрос 41. Чему равна мощность множества $A = \{a, c, p\}$?

Вопрос 42. Чему равна мощность множества $A = \{1\}$?

Вопрос 43. Чему равна мощность множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Вопрос 44. Множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, является:

а) объединением множеств A и B;

б) пересечением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B;

г) симметрической разностью множеств A и B.

Вопрос 45. Множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, является:

а) объединением множеств A и B;
б) пересечением множеств A и B;
в) разностью множеств A и B;
г) симметрической разностью множеств A и B.

Вопрос 46. Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B, является:

а) объединением множеств A и B;
б) пересечением множеств A и B;
в) разностью множеств A и B;
г) симметрической разностью множеств A и B.

Вопрос 47. Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, является:

а) объединением множеств A и B;
б) пересечением множеств A и B;
в) разностью множеств A и B;
г) симметрической разностью множеств A и B.

Вопрос 48. Множество, состоящее из всех тех элементов множеств A и B, которые принадлежат либо только множеству A, либо только множеству B, является:

а) объединением множеств A и B;
б) пересечением множеств A и B;
в) разностью множеств A и B;
г) симметрической разностью множеств A и B.

Вопрос 49. Установите соответствие между аналитической записью и указанными множествами, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1) $A \cap B$	а) $\{3, 4\}$
2) $A \cup B$	б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3) $A \setminus B$	в) $\{1, 2\}$

Вопрос 50. Установите соответствие между аналитической записью и указанными множествами, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1) $A \oplus B$	а) $\{1, 2, 5, 6\}$
2) $A \cup B$	б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3) $A \setminus B$	в) $\{1, 2\}$

Вопрос 51. Установите соответствие между аналитической записью и указанными множествами, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1) $A \cap B$	а) $\{3, 4\}$
2) $A \oplus B$	б) $\{1, 2, 5, 6\}$
3) $A \setminus B$	в) $\{1, 2\}$

Вопрос 52. Установите соответствие между аналитической записью и указанными множествами, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1) $(A \cup B) \cap A$	а) $\{1, 2, 3, 4\}$
2) $A \cup B$	б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3) $A \oplus B$	в) $\{1, 2, 5, 6\}$

Вопрос 53. Установите соответствие между аналитической записью и указанными множествами, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1) $A \cap B$	а) $\{3, 4\}$
2) $A \cup B$	б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3) $(A \cap B) \cup B$	в) $\{3, 4, 5, 6\}$

Вопрос 54. Запишите элементы множества, заданного характеристическим предикатом $A = \{x \mid x \in N \text{ и } x < 6\}$.

Вопрос 55. Запишите элементы множества, заданного характеристическим предикатом $A = \{x \mid x \in N \text{ и } x < 8 \text{ и } x > 2\}$.

Вопрос 56. Укажите равномощные множества:

а) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
в) $\{a, b, c, d, e\}$;
г) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$;
д) $\{3, 4, 1, 2\}$;
е) $\{g, y, x, n, t, s\}$.

Вопрос 57. Упорядочите действия построения диаграммы Эйлера-Венна:

а) построить прямоугольник, представляющий универсальное множество;

б) изобразить замкнутые фигуры (например, круги), представляющие множества, изображенные в наиболее общем виде;

в) заштриховать области, подлежащие рассмотрению.

Вопрос 58. Укажите порядок слов для получения верного утверждения: «Операции над множествами …»

а) рассматриваются;
б) для получения;
в) новых;
г) множеств;
д) из уже;
е) существующих.

Вопрос 59. Укажите порядок применения основных тождеств алгебры множеств для доказательства тождества $\left(\overline{A \cup \overline{\overline{B}}}\right) \cup A = B \cup A$:

а) закон де Моргана;
б) закон двойного дополнения;
в) закон Порецкого.

1.5. Прямое произведение множеств. Отношения и функции

Определение 1.15. ***Упорядоченная пара*** *<x, y> интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Две пары <x, y>, <u, v> считаются равными тогда и только тогда, когда x = u, y = v.*

Упорядоченная n-ка элементов x_1, …, x_n обозначается <x_1, …, x_n>.

Определение 1.16. ***Прямым произведением*** *множеств X и Y называется множество $X \times Y$, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары <x, y>, такие, что $x \in X, y \in Y$.*

Определение 1.17. ***Прямым произведением*** *множеств X_1, X_2, …, X_n называется совокупность всех упорядоченных n-ок <x_1, …, x_n>, таких, что $x \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Если $X_1 = X_2 = \ldots X_n$, то пишут $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X^n$.*

Пример 1.9.

1) Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1\}$. Тогда

$$X \times Y = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 0\rangle, \langle 3, 1\rangle\};$$
$$Y \times X = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}.$$

2) Пусть X – множество точек отрезка [0, 1], а Y – множество точек отрезка [1, 2]. Тогда $X \times Y$ – множество точек квадрата $[0, 1] \times [1, 2]$ с вершинами в точках (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2).

Определение 1.18. ***Бинарным*** *(или двуместным)* ***отношением*** ρ *называется множество упорядоченных пар.*

Если ρ есть отношение и пара $<x, y>$ принадлежит этому отношению, то наряду с записью $<x, y>\in\rho$ употребляется запись $x\rho y$. Элементы x и y называются координатами (или компонентами) отношения ρ.

Определение 1.19. ***N-арным отношением*** *называется множество упорядоченных n-к.*

Определение 1.20. ***Областью определения*** *бинарного отношения* ρ *называется множество* $D_\rho = \{x \mid \text{существует такое } y, \text{ что } x \rho y\}$.

Определение 1.21. ***Областью значений*** *бинарного отношения* ρ *называется множество* $E_\rho = \{y \mid \text{существует такое } x, \text{ что } x \rho y\}$.

Пусть $\rho \subseteq X \times Y$ определено в соответствии с изображением на рис. 1.13. Область определения D_ρ и область значений E_ρ определяются соответственно $D_\rho = \{x: (x, y)\in\rho\}$, $E_\rho = \{y: (x, y)\in\rho\}$.

Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств. Помимо этого, отношения, определенные на конечных множествах, обычно задаются:

– *списком (перечислением) пар*, для которых это отношение выполняется;

– *матрицей* – бинарному отношению соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен 1, если для a_i и a_j имеет место отношение, или 0, если оно отсутствует.

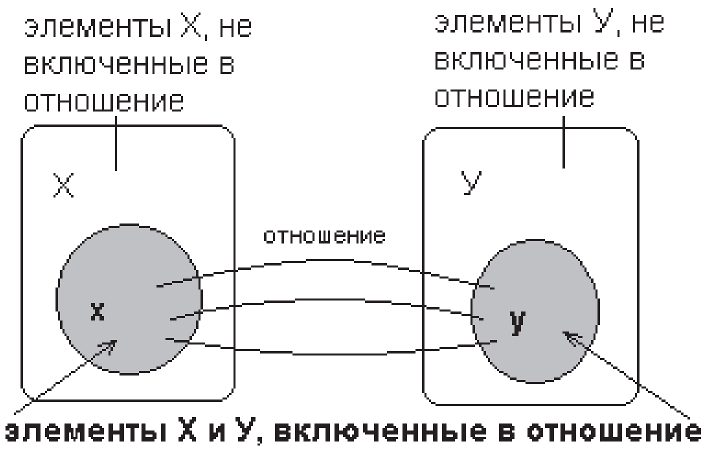


Рис. 1.13

Пример 1.10.

Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение ρ, заданное на множестве $M \times M$, если ρ означает «быть строго меньше».

Отношение ρ как множество содержит все пары элементов a, b из M, такие, что $a < b$. Тогда ρ= {(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}.

Матрица отношения имеет вид

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Определение 1.22. Бинарное отношение f называется **функцией**, если из $<x, y>\in f$ и $<x, z>\in f$ следует, что $y = z$.*

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то две функции f и g равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Область определения функции обозначается D_f, а область значений – R_f. Определяются они так же, как и для бинарных отношений.

Если f – функция, то вместо $<x, y>\in f$ пишут $y = f(x)$ и говорят, что y – значение, соответствующее аргументу x, или y – образ элемента x при отображении f. При этом x называется прообразом элемента y.

*Определение 1.23. Назовем f **n-местной функцией** из X в Y, если f: $X^n\to Y$. Тогда пишем $y = f(x_1, x_2, ...,x_n)$ и говорим, что y – значение функции при значении аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$.*

Для следующих определений пусть f: $X\to Y$.

*Определение 1.24. Функция f называется **инъективной**, если для любых x_1, x_2, y из $y = f(x_1)$ и $y = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$, т.е. каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.*

*Определение 1.25. Функция f называется **сюръективной**, если для любого элемента $y\in Y$ существует элемент $x\in X$ такой, что $y = f(x)$.*

*Определение 1.26. Функция f называется **биективной**, если f одновременно сюръективна и инъективна.*

Рис. 1.14 иллюстрирует понятия отношения, функции, инъекции, сюръекции и биекции.

Пример 1.11.

Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающие значение в этом же множестве:

1) функция $f(x) = e^x$ – инъективна, но не сюръективна;
2) функция $f(x) = x^3 - x$ – сюръективна, но не инъективна;
3) функция $f(x) = 2x + 1$ – биективна.

*Определение 1.27. **Суперпозиция функций** – функция, полученная из системы функций $f, f_1, f_2, ..., f_k$ некоторой подстановкой функций $f_1, f_2,$*

..., f_k во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.

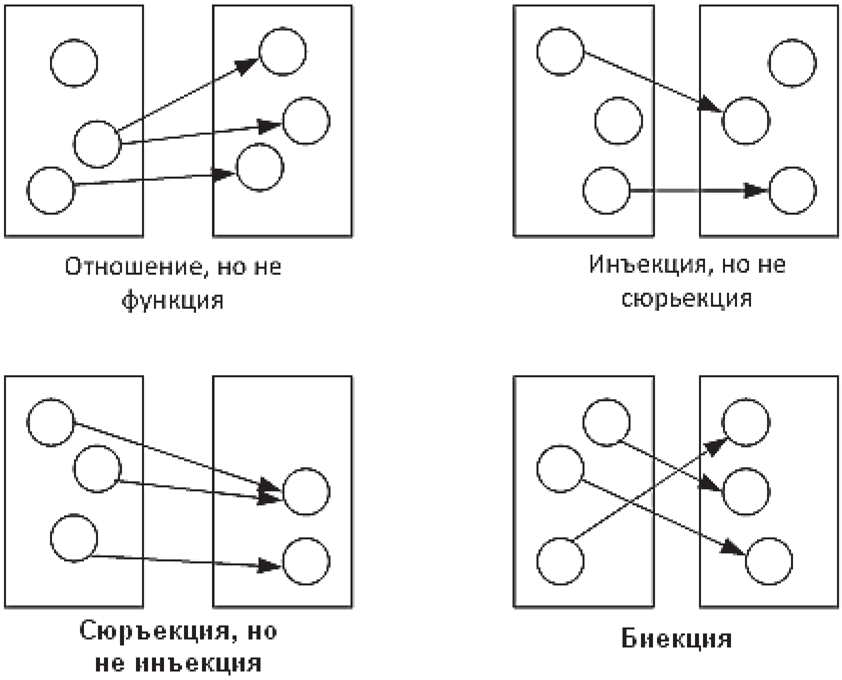


Рис. 1.14

Пример 1.12.

Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

1.6. Свойства бинарных отношений. Специальные бинарные отношения

*Определение 1.28. Отношение ρ на множестве X называется **рефлексивным**, если для любого элемента $x \in X$ выполняется $x\rho x$.*

*Определение 1.29. Отношение ρ на множестве X называется **симметричным**, если для любых $x, y \in X$ из $x\rho y$ следует $y\rho x$.*

*Определение 1.30. Отношение ρ на множестве X называется **транзитивным**, если для любых $x, y, z \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$.*

*Определение 1.31. Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение на множестве X называется отношением **эквивалентности** на множестве X.*

Пример 1.13.

1) Отношение равенства на множестве целых чисел есть отношение эквивалентности.

2) Отношение подобия на множестве треугольников есть отношение эквивалентности.

3) Отношение «строго меньше» на множестве действительных чисел не рефлексивно, не симметрично и транзитивно на этом множестве.

4) Отношение перпендикулярности прямых не рефлексивно, симметрично, не транзитивно.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X.

Определение 1.32. ***Классом эквивалентности****, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in Y$, для которых xρy. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается через* $[x]$: $[x] = \{y \mid y \in X \text{ и } x\rho y\}$.

Определение 1.33. Отношение ρ на множестве X называется ***антисимметричным****, если для любых $x, y \in X$ из xρy и yρx следует $x = y$.*

Определение 1.34. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется ***отношением частичного порядка*** *на множестве X.*

Пример 1.14.

1) Отношение «$x \le y$» на множестве действительных чисел есть отношение частичного порядка.

2) Схема организации подчинения в учреждении есть отношение частичного порядка на множестве должностей.

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если y покрывает x, то точки x и y соединяют отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y. Такие схемы называются диаграммами Хассе. На рис. 1.15 показаны две диаграммы Хассе, причем вторая соответствует линейно упорядоченному множеству.

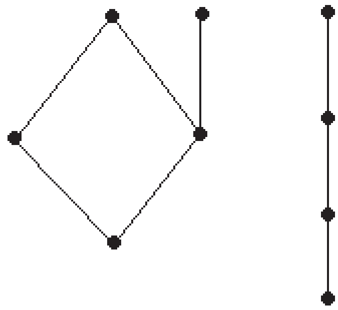


Рис. 1.15

1.7. Алгебраические операции

Пусть дано множество M.

Определение 1.35. Говорят, что на M определена ***бинарная алгебраическая операция****, если всякой упорядоченной паре элементов множества M по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенный элемент этого же множества.*

Примерами бинарных операций на множестве целых чисел являются сложение и умножение. Однако нашему определению не удовлетворяют, например, множество отрицательных чисел относительно умножения и множество действительных чисел относительно деления из-за невозможности деления на ноль.

Среди известных бинарных операций, производимых не над числами, можно отметить векторное умножение векторов пространства, умножение квадратных матриц порядка n, композицию отображений множества X в себя, теоретико-множественное объединение и пересечение множеств.

Фактическое задание алгебраической операции на множестве может быть произведено различными методами. Возможно также непосредственное перечисление всех результатов операций для конечных множеств. Его удобно описать с помощью так называемой таблицы Кэли (табл. 1.2).

Таблица 1.2

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	x_2	x_3	x_1	x_1
x_3	x_2	x_3	x_1	x_2
x_4	x_4	x_2	x_1	x_3

Слева и сверху квадратной таблицы выписывают все элементы множества. На пересечении строки, соответствующей элементу a, и столбца, соответствующего элементу b, записывают результат операции над a и b.

Будем употреблять следующую терминологию и символику: операцию называть умножением, а результат применения операции к элементам a и b – произведением ab.

Определение 1.36. Если для любых элементов a и b множества M справедливо равенство $ab = ba$, то операцию называют коммутативной.

Определение 1.37. Если для любых элементов a, b, c множества M справедливо равенство $a(bc) = (ab)c$, то операцию называют ассоциативной.

В ряде случаев множество M, на котором определена алгебраическая операция, обладает единичным элементом, т.е. таким элементом e, что $ae = ea = a$ для всех a из M. Единичный элемент единственен.

Теорема. Если операция, определенная на M, ассоциативна, то результат ее последовательного применения к n элементам множества не зависит от расстановки скобок.

1.8. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1.

Пусть X – множество пальто в гардеробе, Y – множество крючков. В каком случае отображение множества пальто X в множество крючков Y будет инъективным, сюръективным, биективным?

Задача 1.2.

Среди следующих отображений укажите сюръективные отображения:

1) X – множество кругов, Y – множество действительных чисел, каждому кругу сопоставляется его площадь;

2) X – множество кругов, Y – множество положительных действительных чисел, каждому кругу сопоставляется его площадь,

3) $X=\{x\colon -3\leq x\leq 5\}, Y=R, f\colon x\rightarrow x^2$ (R – множество действительных чисел);

4) $X=\{x\colon -3\leq x\leq 5\}$, $Y=\{x\colon 0\leq x\leq 25\}, f\colon x\rightarrow x^2$.

Задача 1.3.

Отношение R на множестве всех книг библиотеки определили следующим образом. Пара книг a и b принадлежит R, если и только если в этих книгах есть ссылка на одни и те же литературные источники. Определите, является ли R:

1) рефлексивным отношением;
2) симметричным отношением;
3) транзитивным отношением.

Задача 1.4.

Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств K и P, где K – множество ключевых слов, а P – множество Web-страниц. Пара $<x, y>$ принадлежит R, если и только если ключевое слово x содержится на странице y. Является или нет R функцией? Объясните почему.

Задача 1.5.

Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств K и P, где K – множество всех книг в книжном магазине, а P – множество цен. Пара $<x, y>$ принадлежит R, если и только если книга x имеет цену y. Является или нет R функцией? Если да, то является ли данная функция сюръективной, инъективной?

Задача 1.6.

Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств K и P, где K – множество всех документов, содержащихся в папке «Входящие», а P – множество всех номеров, служащих для регистрации этих документов. Объясните, почему данное отношение является функцией и притом биективной.

1.9. Проверочный тест по теме «Бинарные отношения и алгебраические операции»

Вопрос 1. Какими свойствами обладает бинарное отношение «$x < y$»?
а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 2. Какими свойствами обладает бинарное отношение «Параллельность прямых»?
а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 3. Какими свойствами обладает бинарное отношение «Перпендикулярность прямых»?
а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 4. Какими свойствами обладает бинарное отношение «$x \geq y$»?
а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 5. Какими свойствами обладает бинарное отношение «$x > y$»?
а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 6. Какими свойствами обладает бинарное отношение «$x \leq y$»?
а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 7. Какими свойствами обладает бинарное отношение «Подобие треугольников»?

а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 8. Какими свойствами обладает бинарное отношение «Равенство треугольников»?

а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 9. Какими свойствами обладает бинарное отношение «$x = y$»?

а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 10. Какими свойствами обладает бинарное отношение «Перпендикулярность плоскостей»?

а) рефлексивность;
б) симметричность;
в) транзитивность;
г) отношение эквивалентности.

Вопрос 11. Установите соответствие между функцией и ее свойствами.

1) $Y = \cos x$	а) Не инъективна, не сюръективна
2) $Y = \mathrm{tg} x$	б) Не инъективна, сюръективна
3) $Y = x^3 - 5$	в) Инъективна, сюръективна, биективна

Вопрос 12. Установите соответствие между функцией и ее свойствами.

1) $Y = \sin x$	а) Не инъективна, не сюръективна
2) $Y = 2x + 3$	б) Инъективна, сюръективна, биективна
3) $Y = 11^x$	в) Инъективна, не сюръективна

Вопрос13. Установите соответствие между функцией и ее свойствами.

1) $Y = \log_2 X$	а) Инъективна, сюръективна, биективна
2) $Y = \mathrm{ctg} x$	б) Не инъективна, сюръективна
3) $Y = 2x + x^2$	в) Не инъективна, не сюръективна

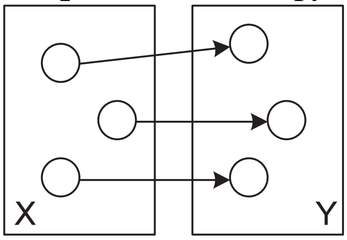
Вопрос 14. Установите соответствие между функцией и ее свойствами.

1) $Y = 5x^2 - x$	а) Не инъективна, не сюръективна
2) $Y = 2x + 3$	б) Инъективна, сюръективна, биективна
3) $Y = 11^x$	в) Инъективна, не сюръективна

Вопрос 15. Установите соответствие между функцией и ее свойствами.

1) $Y = \sin x$	а) Не инъективна, не сюръективна
2) $Y = x^3 - 5$	б) Инъективна, сюръективна, биективна
3) $Y = \mathrm{tg} x$	в) Не инъективна, сюръективна

Вопрос 16. Какая функция изображена ниже?



а) инъекция;
б) сюръекция;
в) биекция.

Вопрос 17. Бинарное отношение, которое одновременно является рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется…

а) субъективным отношением;
б) отношением эквивалентности;
в) отношением суперпозиции;
г) отношением частичного порядка.

Вопрос 18. Если для любого x выполняется условие $x \rho x$, то это бинарное отношение…

а) эквивалентное;
б) симметричное;
в) рефлексивное;
г) транзитивное.

Вопрос 19. Пусть $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{1, 0\}$. Тогда $A \times B$ равно:

а) {<5, 1>, <5, 0>, <6, 1>, <6, 0>, <7, 1>, <7, 0>};
б) {<5, 1>, <6, 0>, <7>};
в) {<1, 5>, <1, 6>, <1, 7>, <0, 5>, <0, 6>, <0, 7>}.

Вопрос 20. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется…

а) отношением частичного порядка;
б) классом эквивалентности;
в) прямым произведением;
г) отношением эквивалентности.

Вопрос 21. Если операция, определенная на *M*, ассоциативна, то результат ее последовательного применения к *n* элементам…

а) зависит от последовательности элементов;

б) зависит от местоположения единичного элемента;

в) не зависит от количества элементов;

г) не зависит от расстановки скобок.

Вопрос 22. Если из того, что для любых x, y выполняется $x\rho y$, следует, что выполняется $y\rho x$, то это бинарное отношение…

а) биективное;

б) симметричное;

в) антисимметричное;

г) рефлексивное.

Вопрос 23. Если из того, что для любых x, y выполняется $x\rho y$ и $y\rho z$ следует, что $x\rho z$, то это бинарное отношение…

а) рефлексивное;

б) антисимметричное;

в) симметричное;

г) транзитивное.

Вопрос 24. Функция называется биективной, если она…

а) инъективна и транзитивна;

б) симметрична и сюръективна;

в) сюръективна, транзитивна и инъективна;

г) инъективна и сюръективна.

Вопрос 25. Пусть X – множество точек отрезка [4, 5], а Y – множество точек отрезка [5, 6]. Тогда $X \times Y$ – множество точек квадрата с вершинами в точках:

а) (4, 5), (5, 6), (5, 4), (6, 5);

б) (20, 25), (25, 30), (5, 5), (5, 6);

в) (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6).

Вопрос 26. Как называется функция, если для любых X_1, X_2 из области определения из того, что $y = f(x_1)$ и $y = (x_2)$, следует, что $x_1 = x_2$?

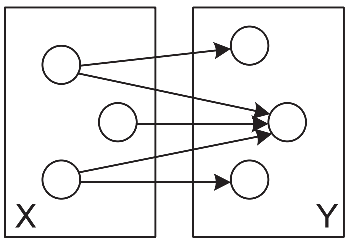
Вопрос 27. Как называется функция, если для любого элемента y существует такой элемент x из области определения, что $y = f(x)$?

Вопрос 28. Какая функция изображена ниже?

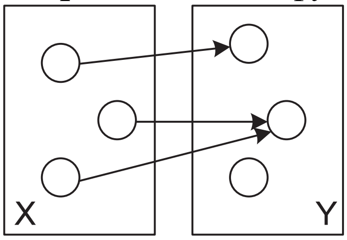
а) инъекция;

б) сюръекция;

в) биекция.



Вопрос 29. Какая функция изображена ниже?



а) инъекция;
б) сюръекция;
в) биекция;
г) не является ни инъекцией, ни сюръекцией.

Вопрос 30. Если из того, что $<x, y>\in f$ и $<x, z>\in f$ следует, что $y = z$, то бинарное отношение f называется …

Вопрос 31. Установить соответствие между бинарным отношением и его свойствами.

1) «$x < y$»	а) Не рефлексивно, не симметрично, транзитивно
2) «Параллельность прямых»	б) Рефлексивно, симметрично, транзитивно
3) «Перпендикулярность прямых»	в) Не рефлексивно, симметрично, не транзитивно

Вопрос 32. Установить соответствие между бинарным отношением и его свойствами.

1) «$x \le y$»	а) Рефлексивно, не симметрично, транзитивно
2) «Подобие треугольников»	б) Рефлексивно, симметрично, транзитивно
3) «Перпендикулярность плоскостей»	в) Не рефлексивно, симметрично, не транзитивно

Вопрос 33. Установить соответствие между бинарным отношением и его свойствами.

1) «Равенство треугольников»	а) Рефлексивно, симметрично, транзитивно
2) «$x > y$»	б) Не рефлексивно, не симметрично, транзитивно
3) «Перпендикулярность прямых»	в) Не рефлексивно, симметрично, не транзитивно

Вопрос 34. Установить соответствие между бинарным отношением и его свойствами.

1) «$x = y$»	а) Рефлексивно, симметрично, транзитивно
2) «Перпендикулярность плоскостей»	б) Не рефлексивно, симметрично, не транзитивно
3) «$x \le y$»	в) Рефлексивно, не симметрично, транзитивно

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Логика высказываний

2.1.1. Высказывания. Логические связки

Определение 2.1. *Под **высказыванием** принято понимать языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно в данный момент времени.*

Высказывания чаще всего обозначают маленькими латинскими буквами a, b, c, x_1, x_2, …

В логике высказываний интересуются не содержанием, а истинностью или ложностью высказываний. Истинностные значения – истина и ложь – будем обозначать И и Л соответственно. Множество {И, Л} называется множеством истинностных значений.

Определение 2.2. *Высказывание называют **простым** (элементарным), если оно рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества). **Сложным** (составным) называется высказывание, составленное из простых с помощью логических связок.*

В естественном языке роль связок при составлении сложных предложений из простых играют следующие грамматические средства: частица «не», союзы «и», «или», «либо … либо», «если …, то», «тогда и только тогда, когда» и др. В логике высказываний логические связки, используемые для составления сложных высказываний, обязаны быть определены точно. Рассмотрим логические связки (операции) над высказываниями, при которых истинностные значения составных высказываний определяются только истинностными значениями составляющих высказываний, а не их смыслом.

В дальнейшем значению «истина» будем ставить в соответствие **1**, а «ложь» – **0**. Каждой логической операции ставится в соответствие ***таблица истинности***. Таблица истинности выражает значения истинности высказываний в зависимости от значений элементарных высказываний. В дальнейшем будем использовать таблицу истинности для установления истинностных значений сложных высказываний при данных значениях входящих в него элементарных высказываний.

Определение 2.3. ***Отрицанием*** *высказывания является новое высказывание, истинное только тогда, когда исходное высказывание ложно* (табл. 2.1). Отрицание обозначается через $\overline{a}$, $\neg a$ и читается как «не a», «неверно, что a».

Таблица 2.1

№ набора	a	$\overline{a}$
0	0	1
1	1	0

Пример 2.1.

a – «Степан любит танцевать». Тогда $\overline{a}$ – «Не верно, что Степан любит танцевать».

Таблица 2.2

№ набора	a	b	$a \wedge b$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Определение 2.4. ***Конъюнкцией*** *двух высказываний является новое высказывание, которое истинно только тогда, когда оба исходных высказывания истинны* (табл. 2.2).

Конъюнкция обозначается $a \wedge b$ или $a \& b$ и читается как «a и b», «a, но b», «a, а b».

Пример 2.2.

a – «Степан любит танцевать», b – «Степан любит петь». Тогда $a \wedge b$ – «Степан любит танцевать и петь».

Таблица 2.3

№ набора	a	b	$a \vee b$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

Определение 2.5. ***Дизъюнкцией*** *двух высказываний является новое высказывание, которое ложно только тогда, когда оба исходных высказывания ложны* (табл. 2.3).

Дизъюнкция обозначается через $a \vee b$ и читается как «a или b».

Пример 2.3.

a – «Степан любит танцевать», b – «Степан любит петь». Тогда $a \vee b$ – «Степан любит танцевать или петь».

Таблица 2.4

№ набора	a	b	$a \to b$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

Определение 2.6. ***Импликацией*** *двух высказываний является новое высказывание, которое ложно только тогда, когда первое истинно, а второе – ложно* (табл. 2.4).

Импликация обозначается $a \to b$ и читается как «если a, то b»; «из a следует b». При этом a называется посылкой или условием, b – следствием или заключением.

Пример 2.4.

a – «Степан любит танцевать», b – «Степан любит петь». Тогда $a \to b$ – «Если Степан любит танцевать, то он любит петь».

Таблица 2.5

№ набора	a	b	$a \approx b$
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Определение 2.7. ***Эквиваленцией (или эквивалентностью)*** *двух высказываний является новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях* (табл. 2.5).

Эквивалентность обозначается $a \approx b$ и читается как «a эквивалентно b».

Пример 2.5.

a – «Степан любит танцевать», b – «Степан любит петь». Тогда $a \approx b$ – «Для того, чтобы Степан любил танцевать, необходимо и достаточно, чтобы он любил петь».

Сведем все сказанное выше в единую таблицу и введем в рассмотрение еще три операции: сумма по модулю два, штрих Шеффера, стрелка Пирса (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Обозначения логической операции	Другие обозначения логической операции	Набор истинностных значений, отвечающих логической операции	Названия логической операции и связки	Как читается выражение, приведенное в первом столбце
$\neg a$		10	Отрицание	Неверно, что a; не a
$a \wedge b$	$a \,\&\, b$ $a \cdot b$ ab $\min(a; b)$	0001	Конъюнкция, логическое умножение, логическое «и»	a и b
$a \vee b$	$a + b$ $\max(a; b)$	0111	Дизъюнкция, логическое сложение, логическое «или»	a или b
$a \to b$	$a \supset b$ $a \Rightarrow b$	1101	Импликация, логическое следование	Если a, то b; a имплицирует b; a влечет b
$a \approx b$	$a \equiv b$ $a \leftrightarrow b$ $a \Leftrightarrow b$	1001	Эквиваленция, эквивалентность, равнозначность, тождественность	a тогда и только тогда, когда b; a эквивалентно b
$a \oplus b$	$a + b$ $a \,\Delta\, b$	0110	Сумма по модулю два, разделительная дизъюнкция, разделительное «или»	a плюс b; либо a, либо b
a / b		1110	Штрих Шеффера, антиконъюнкция	неверно, что a и b; a штрих Шеффера b
$a \downarrow b$	$a \circ b$	1000	Стрелка Пирса, антидизъюнкция, функция Вебба, функция Даггера	ни a, ни b; a стрелка Пирса b

2.1.2. Формулы логики высказываний

Определим понятие формулы логики высказываний.

Определение 2.8. ***Алфавитом*** *называется любое непустое множество. Элементы этого множества называются* ***символами*** *данного алфавита.* ***Словом*** *в данном алфавите называется произвольная конечная последовательность символов (возможно, пустая).*

Алфавит логики высказываний содержит следующие символы:

- высказывательные переменные;
- логические символы;
- символы скобок.

Определение 2.9. Слово в алфавите логики высказываний называется ***формулой****, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) *любая высказывательная переменная – формула;*
2) *если A и B – формулы, то* $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \oplus B$, $A \approx B$, A / B, $A \downarrow B$ *– формулы;*
3) *только те слова являются формулами, для которых это следует из пп.1 и 2.*

Определение 2.10. ***Подформулой*** *формулы A называется любая ее часть, которая сама является формулой.*

Пример 2.6.

Представить логическими формулами следующие высказывания:

1) «Сегодня понедельник или вторник».
2) «Идёт снег или дождь».
3) «Если идёт дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые».
4) «Что в лоб, что по лбу».

Решение.

1) Составное (сложное) высказывание «Сегодня понедельник или вторник» состоит из двух простых: a – «сегодня понедельник»; b – «сегодня вторник».

Высказывания a и b соединены связкой «или», очевидно, в разделительном смысле (не допускается одновременное выполнение обоих условий), т.е. используется логическая связка «сумма по модулю два». Таким образом, данное высказывание представимо логической формулой $a \oplus b$.

2) Высказывание «Идёт снег или дождь» также состоит из двух простых, соединенных связкой «или»: a – «идёт снег»; b – «идёт дождь».

Но в отличие от предыдущего связка «или» использована здесь не в разделительном смысле, поэтому применяется логическая связка дизъюнкция и логическая формула имеет вид $a \vee b$.

3) Сложное высказывание «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые» включает два простых высказывания: a – «идет дождь»; b – «крыши мокрые».

В первом предложении «Если идет дождь, то крыши мокрые» высказывания a, b соединены связкой «если …, то…»: $a \to b$.

Во втором – «Дождя нет, а крыши мокрые» – союз «а» имеет смысл связки «и» ($\wedge$), и, кроме того, высказывание a следует взять с отрицанием: $\bar{a} \wedge b$.

Остается объединить два высказывания в одно связкой $\wedge$:

$$(a \to b) \wedge (\bar{a} \wedge b).$$

4) Высказывание «Что в лоб, что по лбу», можно обозначить: *a* – «в лоб», *b* – «по лбу», и представить логической формулой $a \approx b$.

Пример 2.7.

Пусть *x* означает «я сдам этот экзамен», а *y* – «я буду регулярно выполнять домашние задания». Записать в символической форме следующие высказывания:

1) «я сдам этот экзамен только в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания»;

2) «сдача этого экзамена является достаточным условием того, что я регулярно выполнял домашние задания»;

3) «регулярное выполнение домашних заданий есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы я сдал этот экзамен».

Решение.

1) В высказывании «*я сдам этот экзамен* (***x***) только в том случае, если *буду регулярно выполнять домашние задания* (***y***)» используется логическая связка «если …, то …» – импликация. Данному высказыванию соответствует формула $y \to x$.

2) Переформулируем высказывание «сдача этого экзамена является достаточным условием того, что я регулярно выполнял домашние задания» в высказывание вида «если *я сдал этот экзамен* (***x***), то это означает, что *я регулярно выполнял домашние задания* (***y***)». В данном случае используется логическая связка «если …, то …» – импликация. Высказыванию соответствует формула $x \to y$.

3) В высказывании «*регулярное выполнение домашних заданий* (***y***) есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы *я сдал этот экзамен* (***x***)» используется логическая связка «эквивалентность». Высказыванию соответствует формула $y \sim x$.

Пример 2.8.

Записать формулы для следующих высказываний:

1) «строители сдадут объект в срок, если хватит строительного материала и пополнится бригада монтажников»;

2) «даже если строительного материала будет недостаточно, но увеличится число монтажников, объект можно сдать в срок»;

3) «объект в срок сдать нельзя, если строителей-монтажников не хватает и недостаточно строительного материала».

Решение:

Введем обозначения:

x – строители сдадут объект в срок;

y – строительного материала хватает;

z – бригада монтажников пополнилась.

Переформулируем исходное высказывание «строители сдадут объект в срок, если хватит строительного материала и пополнится бригада монтажников» в высказывание вида «если *хватит строительного материала* (***y***) и *пополнится бригада монтажников* (***z***), то *строители сдадут объект в срок* (***x***)». Высказыванию соответствует формула $(y \wedge z) \to x$.

Рассуждая аналогично, второму высказыванию соответствует формула $(\bar{y} \wedge z) \to x$, третьему высказыванию соответствует формула $(\bar{z} \wedge \bar{y}) \to \bar{x}$.

Пример 2.9.

Представить логической формулой следующий текст:

«Если фирма продолжает выпуск существующего продукта и ориентирована на существующий рынок, то для нее целесообразна стратегия «малого корабля», или экономии издержек. Такая стратегия привлекательна, если интенсивный маркетинг – стратегический хозяйственный фактор, но слабая сторона организации. Если интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором и сильной стороной фирмы, то фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта.»

Решение:

Введем обозначения простых высказываний, содержащихся в первом предложении:

A – «фирма продолжает выпуск существующего продукта»;

B – «фирма ориентирована на существующий рынок;

C – «для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия «малого корабля»;

D – «для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия экономии издержек».

С учетом введенных обозначений логическая формула для первого предложения примет вид

$$(A \wedge B) \to (C \sim D).$$

Второе предложение содержит новые простые высказывания:

K – «интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором организации»;

L – «интенсивный маркетинг является слабой стороной организации».

Логическая формула, представляющая второе предложение,

$$(K \wedge L) \to (C \sim D).$$

В третьем предложении содержатся новые простые высказывания:

M – «интенсивный маркетинг является сильной стороной организации»;

N – «фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта».

Логическая формула для третьего предложения

$$(K \wedge M) \rightarrow N.$$

Окончательно текст записывается следующей логической формулой:

$$((A \wedge B) \rightarrow (C \sim D)) \wedge ((K \wedge L) \rightarrow (C \sim D)) \wedge ((K \wedge M) \rightarrow N).$$

Для каждой формулы логики высказываний можно построить таблицу истинности.

Определение 2.11. Формула называется ***выполнимой (опровержимой)****, если существует такой набор значений переменных, при которых эта формула принимает значение* 1 (0).

Определение 2.12. Формула называется ***тождественно-истинной****, или* ***тавтологией (тождественно-ложной*** *или* ***противоречием)****, если эта формула принимает значение* 1 (0) *при всех наборах значений переменных.*

Пример 2.10.

Составить таблицы истинности для формул:

1) $(x \wedge y) \vee x$;

2) $(x \rightarrow \overline{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \wedge z)$.

Решение.

1) Таблица истинности для формулы $(x \wedge y) \vee x$ имеет следующий вид (табл. 2.7).

Таблица 2.7

№ набора	x	y	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \vee x$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	0	0	1
3	1	1	1	1

2) Таблица истинности для формулы $(x \rightarrow \overline{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \wedge z)$ имеет следующий вид (табл. 2.8).

Таблица 2.8

№ набора	x	y	z	$\overline{y}$	$x \rightarrow \overline{y}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y} \wedge z$	$(x \rightarrow \overline{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \wedge z)$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	0	0
5	1	0	1	1	1	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1	0	0	1
7	1	1	1	0	0	1	0	0	1

2.1.3. Равносильность формул логики высказываний

Определение 2.13. Пусть A и B – две формулы, зависящие от одного и того же списка переменных. Будем называть их ***равносильными****, если для любого набора значений переменных они принимают одинаковые значения.*

Рассмотрим основные равносильности логики высказываний.

Пусть A, B, C – произвольные формулы. Тогда справедливы следующие свойства логических операций (табл. 2.9).

Таблица 2.9

1) Идемпотентность	
$A\wedge A = A$	$A\vee A = A$
2) Коммутативность	
$A\wedge B = B\wedge A$	$A\vee B = B\vee A$
3) Ассоциативность	
$A\wedge(B\wedge C) = (A\wedge B)\wedge C$	$A\vee(B\vee C) = (A\vee B)\vee C$
4) Правила поглощения	
$A\wedge(A\vee B) = A$	$A\vee(A\wedge B) = A$
5) Дистрибутивность	
$A\wedge(B\vee C) = (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	$A\vee(B\wedge C) = (A\vee B)\wedge(A\vee C)$
6) Правила де Моргана	
$\overline{A\wedge B} = \overline{A}\vee\overline{B}$	$\overline{A\vee B} = \overline{A}\wedge\overline{B}$
7) Свойства констант	
$A\wedge 1 = A$ $A\wedge 0 = 0$	$A\vee 0 = A$ $A\vee 1 = 1$
8) Закон исключения третьего и закон противоречия	
$A\wedge\overline{A} = 0$	$A\vee\overline{A} = 1$
9) Снятие двойного отрицания	
$\overline{\overline{A}} = A$	
10) Формулы расщепления (склеивания)	
$(A\wedge B)\vee\left(A\wedge\overline{B}\right) = A$	$(A\vee B)\wedge\left(A\vee\overline{B}\right) = A$
11) Связь дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации	
$A\to B = \overline{A}\vee B = \overline{A\wedge\overline{B}} = \overline{B}\to\overline{A}$	
12) Выражение эквивалентности	
$A\approx B = \left(\overline{A}\vee B\right)\wedge\left(\overline{B}\vee A\right) = (A\wedge B)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\right)$	

Любая из этих равносильностей легко может быть доказана с помощью таблицы истинности.

Пример 2.11.

Рассмотрим одно из правил поглощения $A\wedge(A\vee B) = A$.

По табл. 2.10 видно, что результирующий столбец и столбец A совпадают на всех наборах. Значит, формулы действительно равносильны.

Таблица 2.10

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Однако часто равносильность экономнее доказывать без составления полной таблицы истинности, а с помощью приведенных в табл. 2.9 равносильностей.

Пример 2.12.

1) Доказать равносильность формулы $\overline{a \to b} \equiv a \wedge \bar{b}$, используя логические законы.

2) Упростить формулу $\left(\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \bar{x}\right) \wedge \overline{x \vee \overline{\bar{x} \wedge y}}$.

Решение.

1) $\overline{a \to b} \equiv |11| \equiv \overline{\bar{a} \vee b} \equiv |6| \equiv \bar{\bar{a}} \wedge \bar{b} \equiv |9| \equiv a \wedge \bar{b}$.

2) $$\left(\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \bar{x}\right) \wedge \overline{x \vee \overline{\bar{x} \wedge y}} \equiv |6| \equiv \left(\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{x}\right) \wedge \left(\bar{x} \wedge \overline{\overline{\bar{x} \wedge y}}\right) \equiv |9| \equiv$$

$$\equiv \left(x \vee y \vee \bar{x}\right) \wedge \left(\bar{x} \wedge \bar{x} \wedge y\right) \equiv |2, 1| \equiv \left(\left(x \vee \bar{x}\right) \vee y\right) \wedge \left(\bar{x} \wedge y\right) \equiv$$

$$\equiv |8, 3| \equiv \left(1 \vee y\right) \wedge \bar{x} \wedge y \equiv |7| \equiv 1 \wedge \bar{x} \wedge y \equiv |7| \equiv \bar{x} \wedge y.$$

Пример 2.13.

Определить, является ли формула тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

1) $a \wedge \overline{(a \vee b)}$;
2) $a \to (a \wedge b)$;
3) $((a \to b) \wedge b) \to a$;
4) $(a \to b) \to a$;
5) $\bar{a} \to (a \to b)$.

Решение.

1) $a \wedge \overline{(a \vee b)} \equiv |6| \equiv a \wedge \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) \equiv |3| \equiv a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b} \equiv |8| \equiv 0 \wedge \bar{b} \equiv |7| \equiv 0$.

Поскольку формула при любых значениях переменных равна нулю, то данная формула является противоречием.

2) $$a \to (a \wedge b) \equiv |11| \equiv \bar{a} \vee (a \wedge b) \equiv |5| \equiv \left(\bar{a} \vee a\right) \wedge \left(\bar{a} \vee b\right) \equiv$$

$$\equiv |8| \equiv 1 \wedge \left(\bar{a} \vee b\right) \equiv |7| \equiv \bar{a} \vee b.$$

Исходная формула не является ни тавтологией, ни противоречием, поскольку её значение зависит от значений переменных.

3) $$((a \to b) \wedge b) \to a \equiv |11| \equiv \left(\overline{\left(\bar{a} \vee b\right) \wedge b}\right) \vee a \equiv |6| \equiv \left(\overline{\bar{a} \vee b} \vee \bar{b}\right) \vee a \equiv$$

$$\equiv |6, 3| \equiv \left(\bar{\bar{a}} \wedge \bar{b}\right) \vee \bar{b} \vee a \equiv |4| \equiv \bar{b} \vee a.$$

Исходная формула не является ни тавтологией, ни противоречием, поскольку её значение зависит от значений переменных.

4) $(a \to b) \to a \equiv |11| \equiv \left(\overline{\bar{a} \vee b}\right) \vee a \equiv |6, 9| \equiv \left(a \wedge \bar{b}\right) \vee a \equiv |4| \equiv a.$

Исходная формула не является ни тавтологией, ни противоречием, поскольку её значение зависит от значений переменных.

5) $\overline{a} \to (a \to b) \equiv\!| 11, 3 |\!\equiv \overline{\overline{a}} \vee \overline{a} \vee b \equiv\!| 9 |\!\equiv a \vee \overline{a} \vee b \equiv\!| 8, 7 |\!\equiv 1.$

Поскольку формула при любых значениях переменных равна единице, то данная формула является тавтологией.

2.1.4. Исчисление высказываний

Таблицы истинности позволяют ответить на многие вопросы, касающиеся формул логики высказываний, например на вопрос о тождественной истинности формулы или на вопрос о равносильности двух формул. Однако более сложные вопросы логики высказываний уже не могут быть решены с помощью таблиц истинности.

Наряду с алфавитом и правилами построения сложных высказываний языки логики высказываний содержат правила преобразования логических формул. Правила преобразования реализуют общелогические законы и обеспечивают логически правильные рассуждения. Корректность допустимых в логике преобразований является фундаментальным свойством формальной (математической) логики.

Если описание системы (процесса, явления и т.п.) представлено совокупностью сложных высказываний, истинных для данной системы (в данной интерпретации ее простых высказываний), то с помощью допустимых преобразований имеющихся логических представлений о системе может быть выполнен их анализ (синтез), могут быть получены новые представления, характеризующие указанную систему (истинные для данной системы) и т.п. Таким образом, с помощью допустимых в логике преобразований появляется возможность получения новых знаний из имеющихся.

Определение 2.14. *Процесс получения новых знаний, выраженных высказываниями, из других знаний, также выраженных высказываниями, называется* ***рассуждением*** *(умозаключением). Исходные высказывания называются* ***посылками*** *(гипотезами, условиями), а получаемые высказывания –* ***заключением*** *(следствием).*

Логика – это наука о способах доказательства.

В логике высказываний все доказательства строятся на отношении порядка, т.е. на отношении, которое существует между причиной и следствием. Отдельные звенья цепи связаны символом импликации «→» при логическом выводе мы будем его заменять на символ «⇒», подобно тому как используются два символа эквивалентности «≈» и «=». Во избежание путаницы вместо конъюнкции «∧» будем использовать символ запятая «,», а вместо дизъюнкции «∨» – символ точка с запятой «;». Тогда утверждение, которое требуется доказать, в логике высказываний оформляется в виде следующего причинно-следственного отношения:

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n\text{-}1}, P_n \Rightarrow C,$$

где P_i – посылка, C – заключение.

Условимся формальную запись такого рода называть ***клаузой.*** Смысловой текст, отвечающий некоторой конкретной клаузе, будем называть её ***легендой***.

Пример 2.14.

Для данной легенды построить соответствующую клаузу:

«Если фирма приглашает на работу крупного специалиста в области новейшей технологии, то она считает ее привлекательной и разворачивает работы по изменению технологии производства своего традиционного продукта или начинает разработку нового продукта. Конкурирующая фирма пригласила на работу крупного специалиста в области новейшей технологии. Следовательно, она разворачивает работы по изменению технологии производства выпускаемого продукта или разработке нового продукта».

Решение.

Выделим простые высказывания и введем обозначения:

A – «фирма приглашает на работу крупного специалиста в области новейшей технологии»;

B – «фирма считает данную новейшую технологию привлекательной»;

C – «фирма разворачивает работу по изменению технологии производства своего традиционного продукта»;

D – «фирма начинает разработку нового продукта».

С учетом принятых обозначений умозаключение примет вид «Если A, то B и (C или D). A. Следовательно, C или D.»

Используя логические связки, получим окончательно

$$((A \rightarrow (B \wedge (C \vee D))) \wedge A) \Rightarrow (C \vee D).$$

Используя равносильности логики высказываний, получаем

$$\overline{A} \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D), A \Rightarrow C \vee D.$$

Если клауза верна, то она является некоторой логической теоремой. В логике высказываний существуют аксиоматический и конструктивный подходы доказательств логических выражений. Рассмотренные ниже метод Вонга и метод резолюций относится к смешанной стратегии доказательств.

Основные схемы логически правильных рассуждений.

Приведем примеры наиболее употребимых схем логически правильных рассуждений (некоторые их них приведем без пояснений) (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Название правила	Формулировка правила	Схема рассуждений
1) Правило заключения – утверждающий модус (Modus Ponens)	Если из высказывания *A* следует высказывание *B* и справедливо (истинно) высказывание *A*, то справедливо *B*	$\dfrac{A \to B, A}{B}$
2) Правило отрицания – отрицательный модус (Modus Tollens)	Если из *A* следует *B*, но высказывание *B* неверно, то неверно *A*	$\dfrac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}$
3) Правила утверждения-отрицания (Modus Ponendo-Tollens)	Если справедливо или высказывание *A*, или высказывание *B* (в разделительном смысле) и истинно одно из них, то другое ложно	$\dfrac{A \oplus B, A}{\overline{B}}$; $\dfrac{A \oplus B, B}{\overline{A}}$
4) Правила отрицания-утверждения (Modus Tollen-Ponens)	Если истинно или *A*, или *B* (в разделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое	$\dfrac{A \oplus B, \overline{A}}{B}$; $\dfrac{A \oplus B, \overline{B}}{A}$
	Если истинно *A* или *B* (в неразделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое	$\dfrac{A \vee B, \overline{A}}{B}$; $\dfrac{A \vee B, \overline{B}}{A}$
5) Правило транзитивности	Если из *A* следует *B*, а из *B* следует *C*, то из *A* следует *C*	$\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$
6) Закон противоречия	Если из *A* следует *B* и $\overline{B}$, то неверно *A*	$\dfrac{A \to B, A \to \overline{B}}{\overline{A}}$
7) Правило контрапозиции	Если из *A* следует *B*, то из того, что неверно *B*, следует, что неверно *A*	$\dfrac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}$
8) Правило сложной контрапозиции	Если из *A* и *B* следует *C*, то из *A* и $\overline{C}$ следует $\overline{B}$	$\dfrac{(A \wedge B) \to C}{(A \wedge \overline{C}) \to \overline{B}}$
9) Правило сечения	Если из *A* следует *B*, а из *B* и *C* следует *D*, то из *A* и *C* следует *D*	$\dfrac{A \to B, (B \wedge C) \to D}{(A \wedge C) \to D}$
10) Правило импортации (объединения посылок)		$\dfrac{A \to (B \to C)}{(A \wedge B) \to C}$
11) Правило экспортации (разъединения посылок)		$\dfrac{(A \wedge B) \to C}{A \to (B \to C)}$
12) Правила дилемм		$\dfrac{A \to C, B \to C, A \vee B}{C}$
		$\dfrac{A \to B, A \to C, \overline{B} \vee \overline{C}}{\overline{A}}$
		$\dfrac{A \to B, C \to D, A \vee C}{B \vee D}$
		$\dfrac{A \to B, C \to D, \overline{B} \vee \overline{D}}{\overline{A} \vee \overline{C}}$

Примечание. Следующие рассуждения не являются правильными:

$$\frac{A \to B, B}{A}, \quad \frac{A \to B, \overline{A}}{\overline{B}}, \quad \frac{A \vee B, A}{\overline{B}}.$$

Метод Вонга.

Пусть дана клауза в своей наиболее общей форме:

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Шаг 1. Снятие отрицаний с посылок и заключений. С этой целью нужно опустить знак отрицаний у A_i и B_j и перенести их в противоположные стороны относительно символа $\Rightarrow$.

Шаг 2. Если слева от символа $\Rightarrow$ встречается конъюнкция, а справа – дизъюнкция, то их следует заменить на запятые.

Шаг 3. Если после предыдущих шагов оказалось, что связкой, расположенной слева от символа $\Rightarrow$, является дизъюнкция, а справа – конъюнкция, то образуются две новые клаузы, каждая из которых содержит одну из двух подформул, заменяющих исходную клаузу.

Шаг 4. Если одна и та же буква находится с обеих сторон символа $\Rightarrow$, то такая строка считается доказанной. Исходная клауза является теоремой, если все ветви оканчиваются истинными клаузами. В противном случае переходим к шагу 3.

Пример 2.15.

Выяснить, является ли клауза теоремой:

$$P \vee Q, \overline{R \wedge S}, \overline{Q}, P \vee R \Rightarrow S, \overline{P}.$$

Решение.

Шаг 1. $P \vee Q, \overline{R \wedge S}, \overline{Q}, P \vee R \Rightarrow S, \overline{P}$.

Избавляемся от отрицаний. В результате получаем $P \vee Q, P, P \vee R \Rightarrow S, R \wedge S, Q$.

Шаг 2. Поскольку слева от символа $\Rightarrow$ не встречается конъюнкция, а справа не встречается дизъюнкция, то шаг 2 как таковой отсутствует.

Шаг 3. Построим дерево доказательств (рис. 2.1).

Так как есть недоказанные строки, то исходная клауза теоремой не является.

Пример 2.16.

Выяснить, является ли клауза теоремой:

$\overline{P} \vee Q, \overline{Q} \vee R, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S} \Rightarrow \overline{P}, \overline{T}$.

Решение.

Представим ход доказательства в виде дерева (рис. 2.2). Поскольку все строки доказаны, то исходная клауза является теоремой.

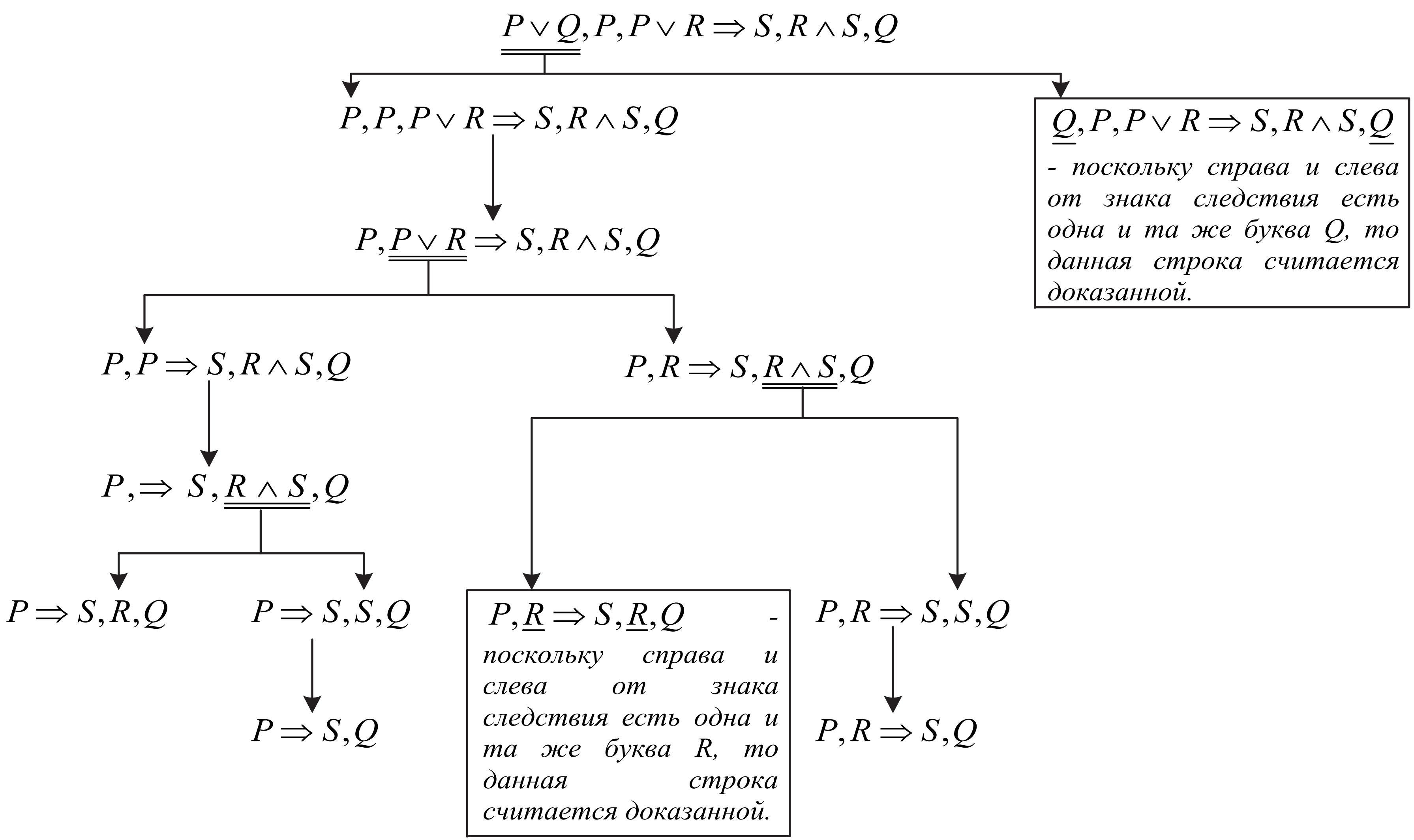

P ∨ Q, P, P ∨ R ⇒ S, R ∧ S, Q
P, P, P ∨ R ⇒ S, R ∧ S, Q
Q, P, P ∨ R ⇒ S, R ∧ S, Q
- поскольку справа и слева от знака следствия есть одна и та же буква Q, то данная строка считается доказанной.
P, P ∨ R ⇒ S, R ∧ S, Q
P, P ⇒ S, R ∧ S, Q
P, R ⇒ S, R ∧ S, Q
P, ⇒ S, R ∧ S, Q
P ⇒ S, R, Q
P ⇒ S, S, Q
P ⇒ S, Q
P, R ⇒ S, R, Q -
поскольку справа и слева от знака следствия есть одна и та же буква R, то данная строка считается доказанной.
P, R ⇒ S, S, Q
P, R ⇒ S, Q

Рис. 2.1

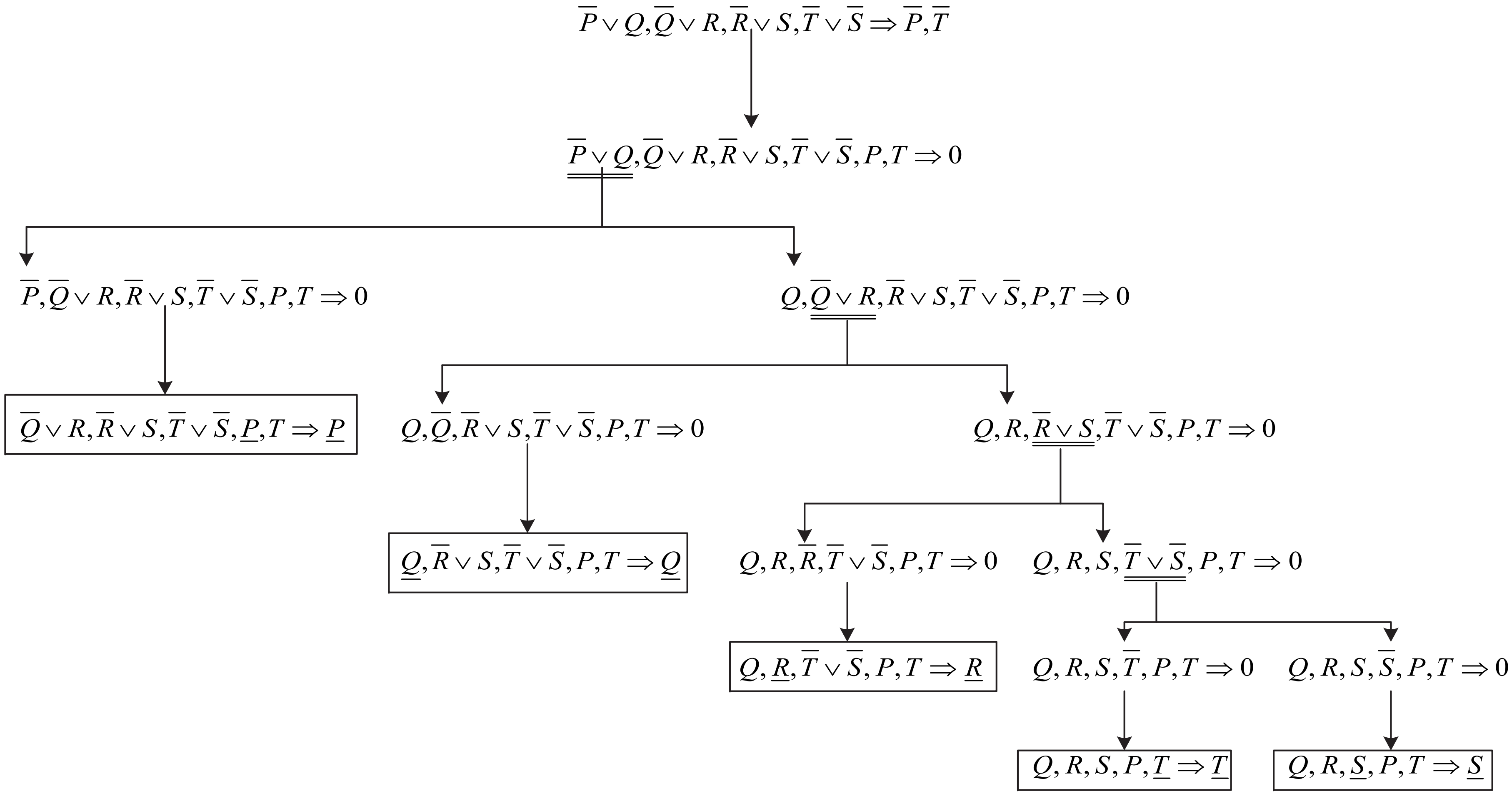

$\overline{P} \vee Q, \overline{Q} \vee R, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S} \Rightarrow \overline{P}, \overline{T}$
$\overline{P} \vee Q, \overline{Q} \vee R, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$\overline{P}, \overline{Q} \vee R, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$Q, \overline{Q} \vee R, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$\boxed{\overline{Q} \vee R, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S}, \underline{P}, T \Rightarrow \underline{P}}$
$Q, \overline{Q}, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$Q, R, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$\boxed{\underline{Q}, \overline{R} \vee S, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow \underline{Q}}$
$Q, R, \overline{R}, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$Q, R, S, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$\boxed{Q, \underline{R}, \overline{T} \vee \overline{S}, P, T \Rightarrow \underline{R}}$
$Q, R, S, \overline{T}, P, T \Rightarrow 0$
$Q, R, S, \overline{S}, P, T \Rightarrow 0$
$\boxed{Q, R, S, P, \underline{T} \Rightarrow \underline{T}}$
$\boxed{Q, R, \underline{S}, P, T \Rightarrow \underline{S}}$

Рис. 2.2

Метод резолюций.

Методику продемонстрируем на примере. Пусть требуется доказать

$$\overline{A} \to B, \overline{C} \to A \Rightarrow \left(B \to \overline{C}\right) \to A.$$

Сначала поступают точно так же, как и по методике Вонга, только необходимо преобразовать клаузу таким образом, чтобы слева от символа $\Rightarrow$ был ноль $\varnothing$:

$$A \vee B, C \vee A \Rightarrow \overline{\overline{(B \wedge C)} \wedge \overline{A}};$$

$$A \vee B, C \vee A, \overline{B \wedge C}, \overline{A} \Rightarrow \varnothing;$$

$$A \vee B, C \vee A, \overline{B} \vee \overline{C}, \overline{A} \Rightarrow \varnothing.$$

Затем из дизъюнктов составляют резолюции до тех пор, пока не получится ноль.

Выпишем по порядку все посылки и далее начнем их «склеивать». Дизъюнкты можно перебирать автоматически в соответствии с возрастанием порядковых номеров. Такая стратегия поиска нуля очень непродуктивна. К решению данной задачи можно подойти творчески.

В итоге получим

1) $A \vee B$	5) (1; 4) B
2) $C \vee A$	6) (2; 4) C
3) $\overline{B} \vee \overline{C}$	7) (3; 5) $\overline{C}$
4) $\overline{A}$	8) (6; 7) $\varnothing$

Иначе произведенные ранее преобразования можно представить в следующем виде:

$$(A \vee B) \wedge (C \vee A) \wedge \left(\overline{B} \vee \overline{C}\right) \wedge \overline{A} \equiv \left((A \vee B) \wedge \overline{A}\right) \wedge (C \vee A) \wedge \left(\overline{B} \vee \overline{C}\right) \equiv$$

$$\equiv \overline{A} \wedge B \wedge (C \vee A) \wedge \left(\overline{B} \vee \overline{C}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\overline{A} \wedge (C \vee A)\right) \wedge \left(B \wedge \left(\overline{B} \vee \overline{C}\right)\right) \equiv \overline{A} \wedge C \wedge B \wedge \overline{C} \equiv \varnothing.$$

2.2. Проверочный тест по теме «Логика высказываний»

Вопрос 1. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если a – «Петр любит петь», b – «Иван любит танцевать», c – «На улице хорошая погода», d – «Все пошли гулять», e – «идет дождь».

1) «Все пошли гулять, если на улице хорошая погода и не идет дождь»	а) $\left(c \wedge \bar{e}\right) \to d$
2) «Либо Иван любит танцевать, либо Петр любит петь, либо на улице плохая погода»	б) $a + b + \bar{c}$
3) «На улице хорошая погода тогда и только тогда, когда не идет дождь или все пошли гулять»	в) $c \approx \left(\bar{e} \vee d\right)$

Вопрос 2. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если a – «Петр любит петь», b – «Иван любит танцевать», c – «На улице хорошая погода», d – «Все пошли гулять», e – «идет дождь».

1) «Либо Иван любит танцевать, либо Петр любит петь, либо на улице плохая погода»	а) $a + b + \bar{c}$
2) «На улице хорошая погода тогда и только тогда, когда не идет дождь или все пошли гулять»	б) $c \approx \left(\bar{e} \vee d\right)$
3) «Если Петр любит петь, а Иван любит танцевать, то либо все пошли гулять, либо идет дождь»	в) $(a \wedge b) \to (d + e)$

Вопрос 3. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если a – «Петр любит петь», b – «Иван любит танцевать», c – «На улице хорошая погода», d – «Все пошли гулять», e – «идет дождь».

1) «На улице хорошая погода тогда и только тогда, когда не идет дождь или все пошли гулять»	а) $c \approx \left(\bar{e} \vee d\right)$
2) «Если Петр любит петь, а Иван любит танцевать, то либо все пошли гулять, либо идет дождь»	б) $(a \wedge b) \to (d + e)$
3) «Иван любит танцевать тогда и только тогда, когда Петр не любит петь, а Петр любит петь тогда и только тогда, когда Иван не любит танцевать»	в) $\left(b \approx \bar{a}\right) \wedge \left(a \approx \bar{b}\right)$

Вопрос 4. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если a – «Петр любит петь», b – «Иван любит танцевать», c – «На улице хорошая погода», d – «Все пошли гулять», e – «идет дождь».

1) «Если Петр любит петь, а Иван любит танцевать, то либо все пошли гулять, либо идет дождь»	а) $(a \wedge b) \to (d + e)$

2) «Иван любит танцевать тогда и только тогда, когда Петр не любит петь, а Петр любит петь тогда и только тогда, когда Иван не любит танцевать»	б) $\left(b \approx \overline{a}\right) \wedge \left(a \approx \overline{b}\right)$
3) «Не верно, что из того что на улице хорошая погода следует, что Иван не любит танцевать или Петр любит петь»	в) $\overline{c \to (\overline{b} \vee a)}$

Вопрос 5. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если a – «Петр любит петь», b – «Иван любит танцевать», c – «На улице хорошая погода», d – «Все пошли гулять», e – «идет дождь».

1) «Иван любит танцевать тогда и только тогда, когда Петр не любит петь, а Петр любит петь тогда и только тогда, когда Иван не любит танцевать»	а) $\left(b \approx \overline{a}\right) \wedge \left(a \approx \overline{b}\right)$
2) «Не верно, что из того что на улице хорошая погода следует, что Иван не любит танцевать или Петр любит петь»	б) $\overline{c \to (\overline{b} \vee a)}$
3) «Петр любит петь тогда и только тогда, когда либо на улице хорошая погода, либо идет дождь»	в) $a \approx \left(c + e\right)$

Вопрос 6. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если a – «Петр любит петь», b – «Иван любит танцевать», c – «На улице хорошая погода», d – «Все пошли гулять», e – «идет дождь».

1) «Не верно, что из того что на улице хорошая погода следует, что Иван не любит танцевать или Петр любит петь»	а) $\overline{c \to (\overline{b} \vee a)}$
2) «Петр любит петь тогда и только тогда, когда либо на улице хорошая погода, либо идет дождь»	б) $a \approx \left(c + e\right)$
3) «Если Петр не любит петь, то не верно, что на улице хорошая погода или идет дождь»	в) $\overline{a} \to \left(\overline{c \vee e}\right)$

Вопрос 7. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если a – «Петр любит петь», b – «Иван любит танцевать», c – «На улице хорошая погода», d – «Все пошли гулять», e – «идет дождь».

1) «Петр любит петь тогда и только тогда, когда либо на улице хорошая погода, либо идет дождь»	а) $a \approx \left(c + e\right)$
2) «Если Петр не любит петь, то не верно, что на улице хорошая погода или идет дождь»	б) $\overline{a} \to \left(\overline{c \vee e}\right)$
3) «Если на улице хорошая погода и все пошли гулять, то либо Петр любит петь, либо Иван любит танцевать»	в) $\left(c \wedge d\right) \to \left(a + b\right)$

Вопрос 8. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если *a* – «Петр любит петь», *b* – «Иван любит танцевать», *c* – «На улице хорошая погода», *d* – «Все пошли гулять», *e* – «идет дождь».

1) «Если Петр не любит петь, то не верно, что на улице хорошая погода или идет дождь»	а) $\overline{a} \to \left(\overline{c \vee e}\right)$
2) «Если на улице хорошая погода и все пошли гулять, то либо Петр любит петь, либо Иван любит танцевать»	б) $(c \wedge d) \to (a + b)$
3) «Если идет дождь, то Петр не любит петь, значит, все пошли гулять»	в) $\left(e \to \overline{a}\right) \to d$

Вопрос 9. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если *a* – «Петр любит петь», *b* – «Иван любит танцевать», *c* – «На улице хорошая погода», *d* – «Все пошли гулять», *e* – «идет дождь».

1) «Либо Иван любит танцевать, либо Петр любит петь, либо на улице плохая погода»	а) $a + b + \overline{c}$
2) «Петр любит петь тогда только тогда, когда либо на улице хорошая погода, либо идет дождь»	б) $a \approx (c + e)$
3) «Если идет дождь, то Петр не любит петь, значит, все пошли гулять»	в) $\left(e \to \overline{a}\right) \to d$

Вопрос 10. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если *a* – «Петр любит петь», *b* – «Иван любит танцевать», *c* – «На улице хорошая погода», *d* – «Все пошли гулять», *e* – «идет дождь».

1) «Если на улице хорошая погода и все пошли гулять, то либо Петр любит петь, либо Иван любит танцевать»	а) $(c \wedge d) \to (a + b)$
2) «Если Петр любит петь, а Иван любит танцевать, то либо все пошли гулять, либо идет дождь»	б) $(a \wedge b) \to (d + e)$
3) «Не верно, что из того что на улице хорошая погода следует, что Иван не любит танцевать или Петр любит петь»	в) $\overline{c \to (\overline{b} \vee a)}$

Вопрос 11. Установить соответствие между высказыванием и формулой логики высказываний, если *a* – «Петр любит петь», *b* – «Иван любит танцевать», *c* – «На улице хорошая погода», *d* – «Все пошли гулять», *e* – «идет дождь».

1) «Если Петр не любит петь, то не верно, что на улице хорошая погода или идет дождь»	а) $\overline{a} \to \left(\overline{c \vee e}\right)$

2) «Иван любит танцевать тогда и только тогда, когда Петр не любит петь, а Петр любит петь тогда и только тогда, когда Иван не любит танцевать»	б) $\left(b \approx \overline{a}\right) \wedge \left(a \approx \overline{b}\right)$
3) «На улице хорошая погода тогда и только тогда, когда не идет дождь или все пошли гулять»	в) $c \approx \left(\overline{e} \vee d\right)$

Вопрос 12. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$?

Вопрос 13. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$?

Вопрос 14. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$?

Вопрос 15. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$?

Вопрос 16. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$?

Вопрос 17. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$?

Вопрос 18. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$?

Вопрос 19. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$?

Вопрос 20. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to \left(\overline{a} \approx (c \downarrow d)\right)$ при заданных значениях переменных $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$?

Вопрос 21. Чему равно значение формулы логики высказываний $(b \mid c) \to (\overline{a} \approx (c \downarrow d))$ при заданных значениях переменных $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$?

Вопрос 22. Чему будет равно $a \wedge b$, если $a = 0$, $b = 0$?

а) 1;
б) 00;
в) 11;
г) 0;
д) 01.

Вопрос 23. Верно ли равенство $(a \vee b) \wedge c \equiv 1$, где $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$?

а) да;
б) нет.

Вопрос 24. Чему будет равно $a \to (c \oplus b)$, где a = И, c = И, b = И?

а) 0;
б) 1;
в) 00;
г) 11;
д) 01.

Вопрос 25. Отрицание в логике высказываний – это:

а) логическая операция, которая истинна только тогда, когда исходное высказывание ложно;

б) логическая операция, которая истинна только тогда, когда оба исходных высказываний истинны;

в) логическая операция, которая ложна только тогда, когда одно ложно, а другое истинно.

Вопрос 26. Верно ли равенство $(1 \wedge 0) \vee (0 \oplus (0 \vee 1)) \equiv 1$?

а) да;
б) нет.

Вопрос 27. Смысловой текст, отвечающий некоторой клаузе, называется:

а) легенда;
б) утверждение;
в) теорема.

Вопрос 28. Представить логической формулой высказывание «Что в лоб, что по лбу».

а) $a \to b$;
б) $a \downarrow b$;
в) $a \approx b$.

Вопрос 29. Чему будет равно $a \wedge b$, если $a = 0$, $b = 0$?

Вопрос 30. Верно ли равенство $(a \vee b) \wedge c \equiv 1$, где $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$?

Вопрос 31. Чему будет равно $a \to (c \oplus b)$, где a = И, c = И, b = И?

Вопрос 32. Установить соответствие между исходной и упрощенной формулами логики высказываний.

1) $(c \wedge \overline{b}) \to a$	а) $\overline{c} \vee b \vee a$
2) $(a + b) \vee \overline{c}$	б) $(a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \vee \overline{c}$
3) $\overline{c \to (\overline{b} \vee a)}$	в) $c \wedge b \wedge \overline{a}$

Вопрос 33. Установить соответствие между исходной и упрощенной формулами логики высказываний.

1) $(b \to \overline{a}) \to a$	а) a
2) $a \approx (\overline{a} \vee b)$	б) $a \wedge b$
3) $(a \wedge b) \to (\overline{a} \wedge b)$	в) $\overline{a} \vee \overline{b}$

Вопрос 34. Установить соответствие между исходной и упрощенной формулами логики высказываний.

1) $(a \wedge b) \approx \overline{b}$	а) $\overline{a} \wedge b$
2) $(b \to \overline{a}) \wedge (a \vee \overline{b})$	б) $\overline{b}$
3) $a \approx (a \to b)$	в) $a \wedge b$

2.3. Булевы функции

2.3.1. Представление булевой функции формулой логики высказываний

Определение 2.15. ***Булевой функцией*** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется n-местная функция, аргументы которой принимают значения во множестве* $\{0, 1\}$ *и которая сама принимает значения в этом же множестве.*

Всякую булеву функцию от n переменных можно задать таблицей из 2^n строк, в которой в каждой строке записывают одну из оценок списка переменных, принимающих значение 0 или 1.

Пример 2.17.

Для $n = 3$ булеву функцию можно задать в виде табл. 2.12.

Используется также задание булевой функции в виде двоичного слова, длина которого зависит от числа переменных.

Таблица 2.12

№ набора	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	$f(0, 0, 0)$
1	0	0	1	$f(0, 0, 1)$
2	0	1	0	$f(0, 1, 0)$
3	0	1	1	$f(0, 1, 1)$
4	1	0	0	$f(1, 0, 0)$
5	1	0	1	$f(1, 0, 1)$
6	1	1	0	$f(1, 1, 0)$
7	1	1	1	$f(1, 1, 1)$

Пример 2.18.

Пусть задана булева функция от трех переменных (табл. 2.13). Тогда число наборов $2^3 = 8$.

Номера наборов всегда нумеруются начиная с нуля, в таблице приведено стандартное расположение всех наборов функции трех переменных (обратите внимание, что каждый набор представляет собой двоичный код числа, равный номеру соответствующего набора). Первые четыре столбца одинаковы для всех булевых функций от трех переменных. Столбец значений функции задается или вычисляется.

Эту же функцию можно записать

$$f(x_1, x_2, x_3) = 00101101.$$

Таблица 2.13

№ набора	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Существует ровно 2^{2^n} различных булевых функций от n переменных. Константы 0 и 1 считают нуль-местными булевыми функциями.

Утверждение. Каждой формуле логики высказываний соответствует некоторая булева функция.

Пример 2.19.

Построить все булевы функции, зависящие от двух переменных.

Решение.

Поскольку $n = 2$, то различных булевых функций от двух переменных существует ровно 16 (табл. 2.14).

Таблица 2.14

№ функции	Значение функции	Формула, соответствующая функции
1	$f = 0000$	$f = 0$
2	$f = 0001$	$f = x_1 \wedge x_2$
3	$f = 0010$	$f = \overline{x_1 \to x_2}$
4	$f = 0011$	$f = x_1$
5	$f = 0100$	$f = \overline{x_1} \wedge x_2$

Продолжение табл. 2.14

№ функции	Значение функции	Формула, соответствующая функции
6	$f = 0101$	$f = x_2$
7	$f = 0110$	$f = x_1 \oplus x_2$
8	$f = 0111$	$f = x_1 \vee x_2$
9	$f = 1000$	$f = \overline{x_1 \wedge x_2}$
10	$f = 1001$	$f = x_1 \approx x_2$
11	$f = 1010$	$f = \overline{x_2}$
12	$f = 1011$	$f = x_1 \vee \overline{x_2}$
13	$f = 1100$	$f = \overline{x_1}$
14	$f = 1101$	$f = x_1 \rightarrow x_2$
15	$f = 1110$	$f = \overline{x_1 \vee x_2}$
16	$f = 1111$	$f = 1$

2.3.2. Нормальные формы

Определение 2.16. ***Элементарной конъюнкцией*** *называется конъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.*

Иногда будем допускать в элементарной конъюнкции наличие повторов элементов.

Определение 2.17. ***Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*** *называется дизъюнкция попарно различных элементарных конъюнкций.*

Иногда будем допускать в ДНФ наличие повторов элементов.

Пример 2.20.

Следующие формулы, соответствующие булевым функциям, находятся в ДНФ:

$$f(x, y) = x \wedge y; \qquad f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3};$$

$$f(a, b, c) = ab \vee a\overline{b}c \vee \overline{a}c; \qquad f(x, y) = x \vee xy.$$

Определение 2.18. ***Элементарной дизъюнкцией*** *называется дизъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.*

Иногда будем допускать в элементарной дизъюнкции наличие повторов элементов.

Определение 2.19. ***Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*** *называется конъюнкция попарно различных элементарных дизъюнкций.*

Иногда будем допускать в КНФ наличие повторов элементов.

Пример 2.21.

Следующие формулы, соответствующие булевым функциям, находятся в КНФ:

$$f(x, y) = x \vee \overline{y}; \quad f(x, y, z) = (x \vee y)(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}).$$

2.3.3. Совершенные нормальные формы

Определение 2.20. ***Совершенной дизъюнктивной формулой формулы алгебры высказываний (СДНФ)*** *называется ДНФ, в которой:*

1) *различны все члены дизъюнкции;*

2) *различны все члены каждой конъюнкции;*

3) *ни одна конъюнкция не содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной;*

4) *каждая конъюнкция содержит все переменные, входящие в формулу, т.е. имеет вид*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{F(c_1, ..., c_n)=1} x_1^{c_1} ... x_n^{c_n},$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *из 0 и 1, для которых* $F(c) = 1$.

Теорема (о СДНФ). Для всякой не равной тождественному нулю формулы логики высказываний $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *существует такая формула* F_1, *зависящая от того же списка переменных и находящаяся в СДНФ*

относительно этого списка, что F_1 *выражает собой формулу* F. *Формула* F_1 *определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.*

Определение 2.21. ***Совершенной конъюнктивной формулой формулы алгебры высказываний (СКНФ)*** *называется КНФ, в которой:*

1) *различны все члены конъюнкции;*

2) *различны все члены каждой дизъюнкции;*

3) *ни одна дизъюнкция не содержит переменную вместе с отрицанием этой переменной;*

4) *каждая дизъюнкция содержит все переменные, входящие в исходную формулу, т.е. имеет вид*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{F(c_1, ..., c_n)=0} (x_1^{\overline{c_1}} \vee ... \vee x_n^{\overline{c_n}}),$$

где конъюнкция берется по всем наборам $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *из 0 и 1, для которых* $F(c) = 0$.

Теорема (о СКНФ). Для всякой не равной тождественной единице формулы логики высказываний $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *существует такая* *формула F_1, зависящая от того же списка переменных и находящаяся в СКНФ относительно этого списка, что F_1 выражает собой формулу F. Формула F_1 определена однозначно с точностью до перестановки конъюнктивных членов.*

Опишем два способа приведения к совершенным нормальным формам.

1-й способ – аналитический.

Алгоритм приведения к СДНФ:

1) Привести формулу с помощью равносильных преобразований к ДНФ.

2) Удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся).

3) Из одинаковых членов дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного.

4) Из одинаковых членов каждой конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного.

5) Если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, то добавить к этой конъюнкции член $x_i \vee \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.

6) Если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, то воспользоваться предписанием из п. 3.

Полученная формула и является СДНФ данной формулы.

Пример 2.22.

Привести следующие формулы к СДНФ с помощью равносильных преобразований:

1) $f(x,y) = (x \vee y)(x \vee \overline{y})$.

2) $f(x,y,z) = x(\overline{y} \vee z)$.

3) $f(x,y) = (x \to y)xy$.

Решение.

1) $f(x,y) = (x \vee y)(x \vee \overline{y}) \equiv x \equiv x(y \vee \overline{y}) \equiv xy \vee x\overline{y}$.

2) $f(x,y,z) = x(\overline{y} \vee z) \equiv x\overline{y} \vee xz \equiv x\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee xz(y \vee \overline{y}) \equiv |5| \equiv$

$\equiv x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xzy \vee xz\overline{y} \equiv x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xyz$.

3) $f(x,y) = (x \to y)xy \equiv (\overline{x} \vee y)xy \equiv \overline{x}xy \vee yxy \equiv xy$.

Алгоритм приведения к СКНФ:

1) Привести формулу с помощью равносильных преобразований к КНФ.

2) Удалить члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся).

3) Из одинаковых членов конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного.

4) Из одинаковых членов каждой дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного.

5) Если в какой-нибудь дизъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, то добавить к этой дизъюнкции член $x_i \wedge \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.

6) Если в полученной конъюнкции окажутся одинаковые члены, то воспользоваться предписанием из п. 3.

Полученная формула и является СКНФ данной формулы.

Пример 2.23.

Привести следующие формулы, соответствующие булевым функциям, к СКНФ с помощью равносильных преобразований:

1) $f(x,y,z) = x\left(\overline{y} \vee z\right)$;

2) $f(x,y) = (x \to y)xy$.

Решение.

1) $$\begin{aligned} &f(x,y,z) = x\left(\overline{y} \vee z\right) \equiv \left(x \vee y\overline{y} \vee z\overline{z}\right)\left(\overline{y} \vee z \vee x\overline{x}\right) \equiv \\ &\equiv (x \vee y \vee z)\left(x \vee y \vee \overline{z}\right)\left(x \vee \overline{y} \vee z\right)\left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee z\right)\left(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z\right) \equiv \\ &\equiv (x \vee y \vee z)\left(x \vee y \vee \overline{z}\right)\left(x \vee \overline{y} \vee z\right)\left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z\right). \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} &f(x,y) = (x \to y)xy \equiv \left(\overline{x} \vee y\right)xy \equiv \left(\overline{x} \vee y\right)\left(x \vee y\overline{y}\right)\left(y \vee x\overline{x}\right) \equiv \\ &\equiv \left(\overline{x} \vee y\right)(x \vee y)\left(x \vee \overline{y}\right)(y \vee x)\left(y \vee \overline{x}\right) \equiv (x \vee y)\left(x \vee \overline{y}\right)\left(\overline{x} \vee y\right). \end{aligned}$$

2-й способ – табличный.

Составляем таблицу истинности для данной функции.

Алгоритм приведения к СДНФ.

Строим таблицу значений формулы. Рассматриваем только те строки, в которых значение формулы равно единице. Каждой такой строке соответствует конъюнкция всех аргументов (без повторений). Причем аргумент, принимающий значение 0, входит в нее с отрицанием, значение 1 – без отрицания. Наконец образуем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций.

Пример 2.24.

Построить СДНФ для данных булевых функций:

1) $f(x,y,z) == x\left(\overline{y} \vee z\right)$.

2) $f(x,y) = (x \to y)xy$.

Решение.

1) $f(x,y,z) = x\left(\overline{y} \vee z\right)$.

Строим таблицу истинности (табл. 2.15). Рассматриваем только 4, 5 и 7 наборы, так как только на этих наборах функция принимает значение равное единице.

СДНФ имеет вид $f(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$.

Таблица 2.15

№ набора	x	y	z	$\bar{y}$	$\bar{y} \vee z$	$x(\bar{y} \vee z)$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

2) $f(x,y) = (x \to y)xy$.

Строим таблицу истинности (табл. 2.16). СДНФ (1): № 3:

$$f(x, y) = x\,y.$$

Таблица 2.16

№ набора	x	y	$x \to y$	$(x \to y) \wedge x \wedge y$
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0
2	1	0	0	0
3	1	1	1	1

Алгоритм приведения к СКНФ.

Рассматриваем только те строки таблицы, где функция принимает значение 0. Каждой такой строке соответствует дизъюнкция всех переменных (без повторений). Причем аргумент, принимающий значение 0, берется без отрицания, значение 1 – с отрицанием. Наконец образуют конъюнкцию полученных дизъюнкций.

Пример 2.25.

Построить СКНФ для данных булевых функций:

1) $f(x,y,z) = x(\bar{y} \vee z)$.

2) $f(x,y) = (x \to y)xy$.

Решение.

1) Строим таблицу значений, используя предыдущий пример (табл. 2.17). Рассматриваем только наборы, на которых функция принимает значение ноль. СКНФ (0): № 0, 1, 2, 3, 6:

$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Таблица 2.17

№ набора	x	y	z	$x(\overline{y} \vee z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

2) Строим таблицу значений, используя предыдущий пример (табл. 2.18). СКНФ (0): № 0, 1, 2:

$$f(x, y) = (x \vee y)(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y).$$

Таблица 2.18

№ набора	x	y	$(x \to y) \wedge x \wedge y$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Теорема 1. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ k-местная булева функция. Если f не равна тождественно нулю, то существует такая формула F, зависящая от списка переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и находящаяся в СДНФ относительно этого списка, что F выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Теорема 2. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k-местная булева функция. Если f не равна тождественно единице, то существует такая формула F, зависящая от списка переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и находящаяся в СКНФ относительно этого списка, что F выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

Пример 2.26.

Построить СКНФ и СДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$= 00101110.

Решение.

Строим таблицу значений функции (табл. 2.19). СКНФ (0): № 0, 1, 3, 7:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

СДНФ (1): № 2, 4, 5, 6:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, x_2\, \overline{x_3}.$$

Таблица 2.19

№ набора	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

2.3.4. Минимизация нормальных форм

Выше было сказано, что произвольная булева функция может быть представлена формулой в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме. Равносильными преобразованиями можно получить формулу, содержащую меньшее, чем исходная, число переменных.

Определение 2.22. ***Минимальной ДНФ (МДНФ)*** *функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ДНФ, реализующая функцию f и содержащая минимальное число символов переменных по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими функцию f.*

МДНФ данной формулы можно найти, перебрав конечное число равносильных ей ДНФ и выбрав среди них ту, которая содержит минимальное число переменных. Однако при большом числе переменных такой перебор практически невыполним. Существуют эффективные способы нахождения минимальной ДНФ. Рассмотрим два из них.

Каждый из рассмотренных ниже методов состоит из двух этапов:

1) построение сокращенной ДНФ;
2) построение матрицы покрытий.

Определение 2.23. Если для всякого набора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений переменных условие $g(a) = 1$ влечет $f(a) = 1$, то функция g называется ***частью функции*** *f (или* ***функция f накрывает функцию g****). Если при этом для некоторого набора $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ функция $g(c) = 1$, то говорят, что функция g накрывает единицу функции f на наборе c (или что g накрывает конституенту единицы $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ функции f).*

Конституента единицы функции f есть часть функции f, накрывающая единственную единицу функции f.

Определение 2.24. Элементарная конъюнкция K называется ***импликантом*** *функции f, если для всякого набора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из 0 и 1 условие $K(a) = 1$ влечет $f(a) = 1$.*

Определение 2.25. Импликант K функции f называется простым, если выражение, получающееся из него выбрасыванием любых множителей, уже не импликант функции f.

Всякий импликант функции *f* есть часть функции *f*.

Теорема. Всякая функция реализуется дизъюнкцией всех своих простых импликант.

Определение 2.26. ***Сокращенная ДНФ*** *функции f есть дизъюнкция всех простых импликант функции f.*

Утверждение. Всякая функция f реализуется своей сокращенной ДНФ. Для всякой функции, не равной тождественно нулю, существует ***единственная сокращенная ДНФ.***

Теорема Куайна. Если в СДНФ функции f провести все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения и удаления дублирующих членов, то в результате получится сокращенная ДНФ функции f.

Алгоритм Куайна построения сокращенной ДНФ.

1) Получить СДНФ функции.
2) Провести все операции неполного склеивания.
3) Провести все операции поглощения.

Пример 2.27.

Минимизировать функцию *f* = 1111010010101111.

Решение.

1) Строим таблицу значения для данной функции (табл. 2.20). Строим СДНФ функции. При этом слагаемые нумеруем и записываем в столбец. СДНФ (1): № 0, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15 (табл. 2.21).

Таблица 2.20

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Таблица 2.21

№ слагаемого	слагаемое
1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
2	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$
3	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$
4	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x\,x_4$
5	$\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$
6	$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
7	$x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$
8	$x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
9	$x_1 x_2\,\overline{x_3}\,x_4$
10	$x_1 x_2 x_3\,\overline{x_4}$
11	$x_1 x_2 x_3 x_4$

2) Проводим все операции неполного склеивания. Первый этап склеивания изображен в табл. 2.22.

Таблица 2.22

Слагаемые	Склеивание по переменной	Результат	Нумерация новых слагаемых
1, 2	x_4	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	1
1, 3	x_3	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	2
1, 6	x_1	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	3
2, 4	x_3	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4$	4
2, 5	x_2	$\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$	**5**
3, 4	x_4	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	6
3, 7	x_1	$\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$	7
5, 9	x_1	$x_2\,\overline{x_3}x_4$	**8**
6, 7	x_3	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	9
6, 8	x_2	$x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	10
7, 10	x_2	$x_1x_3\overline{x_4}$	11
8, 9	x_4	$x_1x_2\,\overline{x_3}$	12
8, 10	x_3	$x_1x_2\,\overline{x_4}$	13
9, 11	x_3	$x_1x_2\,x_4$	14
10, 11	x_4	$x_1x_2x_3$	15

В первом этапе склеивания участвовали все слагаемые СДНФ, значит, ни одно из исходных слагаемых не войдёт в сокращённую ДНФ. После первого этапа склеивания (и возможных поглощений) получаем

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}\vee\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\vee$$
$$\vee\overline{x_2}x_3\overline{x_4}\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}\vee x_2\overline{x_3}x_4\vee x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee x_1x_3\overline{x_4}\vee x_1x_2\overline{x_3}\vee x_1x_2\overline{x_4}\vee x_1x_2x_4\vee x_1x_2x_3.$$

Пронумеруем дизъюнктивные члены в полученной ДНФ в порядке их следования от 1 до 15 (см. табл. 2.22). Второй этап склеивания изображен в табл. 2.23.

Таблица 2.23

Слагаемые	Склеивание по переменной	Результат
1, 6	x_3	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$
2, 4	x_4	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$
2, 9	x_1	$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$
3, 7	x_3	$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$
9, 13	x_2	$x_1\overline{x_4}$
10, 11	x_3	$x_1\overline{x_4}$
12, 15	x_3	x_1x_2
13, 14	x_4	x_1x_2

В процедуре склеивания на втором этапе не принимали участие слагаемые № 5, 8 с предыдущего шага, поэтому после второго этапа склеивания и последующих поглощений получаем

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\, x_4 \vee x_2 \overline{x_3}\, x_4 .$$

Поскольку дальнейшее склеивание невозможно, то это и будет сокращенная ДНФ исходной функции.

Построение сокращенной ДНФ в классе дизъюнктивных нормальных форм.

Этот метод не отличается большой эффективностью, но он прост для изложения и не требует введения дополнительных понятий.

Пусть булева функция задана таблицей истинности или СДНФ.

Минимизирующая карта булевой функции представляет собой квадратную матрицу $2^n \times 2^n$, где n – число переменных. Первые столбцы отводят для аргументов, дальнейшие – для их всевозможных конъюнкций по 2, по 3 и более сомножителей, предпоследний – для конъюнкции всех аргументов, последний – для значений функции.

Шаг 1. Столбцы для аргументов, как обычно в таблицах истинности, заполняются всевозможными наборами 0 и 1. В столбцах для конъюнкций проставляются десятичные значения двоичных чисел, соответствующих наборам значений аргументов. Последний столбец заполняется соответственно значению функции.

Далее работа чередуется по строкам, по столбцам.

Шаг 2. Вычеркиваются строки, в которых функция обращается в ноль.

Шаг 3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркивают те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге.

Шаг 4. В сохранившихся строках выбирают «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводят их кружочками.

Шаг 5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркивают все, кроме одного.

Шаг 6. С помощью оставшихся обведенных чисел образуют конъюнкции. Для этого переводят каждое число в двоичную систему. Переменную, которой соответствует 1, берут сомножителем без отрицания, которой соответствует 0 – с отрицанием. Составляют дизъюнкцию полученных конъюнкций. В результате получаем сокращенную ДНФ функции.

Пример 2.28.

Построить сокращенную ДНФ для функции f = 11100101.

Решение.

Шаг 1. Строим минимизационную карту (табл. 2.24).

Таблица 2.24

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	2	2	1
3	0	1	1	1	1	3	3	0
4	1	0	0	2	2	0	4	0
5	1	0	1	2	3	1	5	1
6	1	1	0	3	2	2	6	0
7	1	1	1	3	3	3	7	1

Шаг 2. Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в ноль (табл. 2.25).

Таблица 2.25

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	2	2	1
3	0	1	1	1	1	3	3	0
4	1	0	0	2	2	0	4	0
5	1	0	1	2	3	1	5	1
6	1	1	0	3	2	2	6	0
7	1	1	1	3	3	3	7	1

Шаг 3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге (табл. 2.26).

Таблица 2.26

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	**0**	**0**	**0**	0	0	**0**	0	1
1	**0**	**0**	**1**	0	**1**	1	1	1
2	**0**	**1**	**0**	**1**	0	**2**	2	1
3	0	1	1	1	1	3	3	0
4	1	0	0	2	2	0	4	0
5	**1**	**0**	**1**	**2**	3	1	5	1
6	1	1	0	3	2	2	6	0
7	**1**	**1**	**1**	**3**	3	**3**	7	1

Шаг 4. В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их (табл. 2.27).

Таблица 2.27

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	**0**	**0**	**0**	0	0	**0**	**0**	1
1	**0**	**0**	**1**	0	**1**	1	**1**	1
2	**0**	**1**	**0**	**1**	0	**2**	**2**	1
3	0	1	1	1	1	3	3	0
4	1	0	0	2	2	0	4	0
5	**1**	**0**	**1**	**2**	3	1	**5**	1
6	1	1	0	3	2	2	6	0
7	**1**	**1**	**1**	**3**	3	**3**	**7**	1

Шаг 5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного (табл. 2.28).

Таблица 2.28

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	**0**	**0**	**0**	0	0	**0**	**0**	1
1	**0**	**0**	**1**	0	**1**	1	**1**	1
2	**0**	**1**	**0**	**1**	0	**2**	**2**	1
3	0	1	1	1	1	3	3	0
4	1	0	0	2	2	0	4	0
5	**1**	**0**	**1**	**2**	3	1	**5**	1
6	1	1	0	3	2	2	6	0
7	**1**	**1**	**1**	**3**	3	**3**	**7**	1

Шаг 6. С помощью оставшихся обведенных чисел образуем конъюнкции. Для этого переводим каждое число в двоичную систему. Переменную, которой соответствует 1, берем сомножителем без отрицания, 0 – с отрицанием. Составляем дизъюнкцию полученных конъюнкций.

Сокращенная ДНФ имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3.$$

Пример 2.29.

Построить сокращенную ДНФ функции $f = 1111010010101111$ с использованием минимизационной карты.

Решение.

Строим минимизационную карту (табл. 2.29) и пошагово выполняем алгоритм.

Шаг 1. Заполняем таблицу.

Шаг 2. Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в ноль (табл. 2.30).

Таблица 2.29

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	0
8	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	0
10	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	10	1
11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	1
14	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Таблица 2.30

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	0
8	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	0
10	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	10	1
11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	1
14	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Шаг 3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге (табл. 2.31).

Таблица 2.31

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	0
8	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	0
10	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	10	1
11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	1
14	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Шаг 4. В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их (табл. 2.32).

Таблица 2.32

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	0	0	0	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	$\boxed{0}$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	$\boxed{0}$	1	0	1	$\boxed{0}$	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	$\boxed{0}$	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	0
8	1	0	0	0	2	2	$\boxed{2}$	0	$\boxed{0}$	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	0
10	1	0	1	0	2	3	$\boxed{2}$	1	$\boxed{0}$	2	5	4	6	2	10	1
11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	$\boxed{3}$	2	$\boxed{2}$	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	$\boxed{3}$	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	1
14	1	1	1	0	$\boxed{3}$	3	$\boxed{2}$	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	$\boxed{3}$	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Шаг 5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного (табл. 2.33).

Таблица 2.33

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**2**	**2**	**2**	**1**
3	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**1**
4	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**2**	**2**	**0**	**4**	**4**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**	**5**	**1**
6	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**3**	**2**	**2**	**3**	**2**	**2**	**6**	**6**	**0**
7	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**7**	**7**	**0**
8	**1**	**0**	**0**	**0**	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**4**	**4**	**4**	**0**	**8**	**1**
9	**1**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**3**	**0**	**1**	**1**	**4**	**5**	**5**	**1**	**9**	**0**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**3**	**2**	**1**	**0**	**2**	**5**	**4**	**6**	**2**	**10**	**1**
11	**1**	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**3**	**1**	**1**	**3**	**5**	**5**	**7**	**3**	**11**	**0**
12	**1**	**1**	**0**	**0**	**3**	**2**	**2**	**2**	**2**	**0**	**6**	**6**	**4**	**4**	**12**	**1**
13	**1**	**1**	**0**	**1**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**1**	**6**	**7**	**5**	**5**	**13**	**1**
14	**1**	**1**	**1**	**0**	**3**	**3**	**2**	**3**	**2**	**2**	**7**	**6**	**6**	**6**	**14**	**1**
15	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**7**	**7**	**7**	**7**	**15**	**1**

Шаг 6. Сокращенная ДНФ имеет вид

$$f = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_2 x_4} \vee \overline{x_1 x_3} x_4 \vee x_2 \overline{x_3} x_4 .$$

Построение всех тупиковых ДНФ.

Определение 2.27. ***Тупиковой ДНФ (ТДНФ)*** *функции f называется такая ДНФ ее простых импликант, из которых нельзя выбросить ни одного импликанта, не изменив функции f.*

Теорема. *Всякая минимальная ДНФ некоторой функции является ее тупиковой ДНФ.*

Для получения МДНФ функции f необходимо построить все ТДНФ функции f и выбрать те из них, которые содержат минимальное число букв.

Алгоритм построения всех тупиковых ДНФ.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть булева функция.

Шаг 1. Построим СДНФ функции f и пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ есть ее конституенты (единицы).

Шаг 2. Построим сокращенную ДНФ функции f и пусть $K_1, K_2, \ldots, K_m$ – ее простые импликанты.

Шаг 3. Построим матрицу покрытий простых импликант функции f ее коституентами единицы (табл. 2.34), полагая, что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если каждый множитель в } K_i \text{ является множителем } \textit{в } P_j; \\ \quad 0 \text{ в противном случае}. \end{cases}$$

Таблица 2.34

N	P_1	P_2	…	P_j	…	P_n
K_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
K_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
K_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
K_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Шаг 4. Для каждого столбца j $(1 \le j \le n)$ найдем множество E_j всех тех номеров i строк, для которых $a_{ij} = 1$. Пусть $E_j = \{e_{j1}, e_{j2}, e_{j_{rj}}\}$. Составим выражение $A = \overset{n}{\underset{j=1}{\wedge}} \left(e_{j1} \vee e_{j2} \vee \ldots \vee e_{j,rj}\right)$. Назовем его решеточным выражением. Это выражение можно рассматривать как формулу, построенную в свободной дистрибутивной решетке с образующими 1, 2, …, m и с операциями конъюнкции и дизъюнкции.

Шаг 5. В выражении A раскроем скобки, приведя выражение A к равносильному выражению $B = \underset{i}{\vee}(e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \ldots \wedge e_{in})$, где перечислены все конъюнкции $e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \ldots \wedge e_{in}$, элементы e_{i1}, e_{i2}, …, e_{in} которой взяты из скобок 1, 2, …, n соответственно в выражении A.

Шаг 6. В выражении B проведем все операции удаления дублирующих членов и все операции поглощения. В результате получим равносильное выражение C, представляющее собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Пример 2.30.

Построить все минимальные ДНФ для функции $f = 1111010010101111$.

Решение.

Сокращенная ДНФ для данной функции имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\, x_4 \vee x_2 \overline{x_3}\, x_4.$$

Строим матрицу покрытий (табл. 2.35).

Пошагово будем выбирать слагаемые, которые войдут в минимальную ДНФ. Если слагаемое нами выбрано, то мы помечаем конституенты единицы функции f, которые будут покрыты (по строке). При этом автоматически исключаем из рассмотрения конституенты единицы, которые уже покрыты, но относятся к другим слагаемым сокращенной ДНФ.

Таблица 2.35

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты				Конституенты единицы функции f										
	x_1	x_2	x_3	x_4	0000	0001	0010	0011	0101	1000	1010	1100	1101	1110	1111
x_1x_2	1	1	-	-								+	+	+	+
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	-	+	+	+	+							
$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	-	0	-	0	+		+			+	+				
$x_1\overline{x_4}$	1	-	-	0						+	+	+		+	
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4$	0	-	0	1		+			+						
$x_2\overline{x_3}\,x_4$.	-	1	0	1					+				+		

Шаг 1. Выбираем слагаемое 1 (табл. 2.36).

Таблица 2.36

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты				Конституенты единицы функции f										
	x_1	x_2	x_3	x_4	0000	0001	0010	0011	0101	1000	1010	1100	1101	1110	1111
x_1x_2	1	1	-	-								+	+	+	+
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	-	+	+	+	+							
$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	-	0	-	0	+		+			+	+				
$x_1\overline{x_4}$	1	-	-	0						+	+	+		+	
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4$	0	-	0	1		+			+						
$x_2\overline{x_3}\,x_4$.	-	1	0	1					+				+		

Шаг 2. Выбираем слагаемое 2 (табл. 2.37).

Таблица 2.37

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты				Конституенты единицы функции f										
	x_1	x_2	x_3	x_4	0000	0001	0010	0011	0101	1000	1010	1100	1101	1110	1111
x_1x_2	1	1	-	-								+	+	+	+
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	-	+	+	+	+							
$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	-	0	-	0	+		+			+	+				
$x_1\overline{x_4}$	1	-	-	0						+	+	+		+	
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4$	0	-	0	1		+			+						
$x_2\overline{x_3}\,x_4$.	-	1	0	1					+				+		

Шаг 3. Выбираем слагаемое 4 (табл. 2.38).

Таблица 2.38

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты				Конституенты единицы функции f										
	x_1	x_2	x_3	x_4	0000	0001	0010	0011	0101	1000	1010	1100	1101	1110	1111
x_1x_2	1	1	-	-								+	+	+	+
$\overline{x}_1\overline{x}_2$	0	0	-	-	+	+	+	+							
$\overline{x}_2\overline{x}_4$	-	0	-	0	+		+			+	+				
$x_1\overline{x}_4$	1	-	-	0						+	+	+		+	
$\overline{x}_1\overline{x}_3x_4$	0	-	0	1		+			+						
$x_2\overline{x}_3x_4$.	-	1	0	1					+				+		

Шаг 4. Выбираем слагаемое 5 (табл. 2.39).

Таблица 2.39

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты				Конституенты единицы функции f										
	x_1	x_2	x_3	x_4	0000	0001	0010	0011	0101	1000	1010	1100	1101	1110	1111
x_1x_2	1	1	-	-								+	+	+	+
$\overline{x}_1\overline{x}_2$	0	0	-	-	+	+	+	+							
$\overline{x}_2\overline{x}_4$	-	0	-	0	+		+			+	+				
$x_1\overline{x}_4$	1	-	-	0						+	+	+		+	
$\overline{x}_1\overline{x}_3x_4$	0	-	0	1		+			+						
$x_2\overline{x}_3x_4$.	-	1	0	1					+				+		

Поскольку все конституенты единицы покрыты, то одна из ТДНФ имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_2\vee x_1\overline{x}_4\vee\overline{x}_1\overline{x}_3x_4.$$

Поскольку выбор включаемых слагаемых произволен, то функция может иметь несколько ТДНФ. Для рассматриваемой функции существует еще несколько ТДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_2\vee\overline{x}_2\overline{x}_4\vee\overline{x}_1\overline{x}_3x_4,$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_2\vee\overline{x}_2\overline{x}_4\vee x_2\overline{x}_3x_4,$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_2\vee x_1\overline{x}_4\vee x_2\overline{x}_3x_4.$$

Все найденные ТДНФ являются минимальными ДНФ.

Пример 2.31.
Построить одну из МДНФ функции $f = 11100101$.
Решение.
Сокращенная ДНФ для данной функции имеет вид

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3.$$

Строим матрицу покрытий (табл. 2.40).

Таблица 2.40

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f				
	x_1	x_2	x_3	000	001	010	101	111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	+	+			
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}$	0	-	0	+		+		
$x_1 x_3$	1	-	1				+	+
$\overline{x_2}\,x_3.$	-	0	1		+		+	

Шаг 1. Выбираем слагаемое 3 (табл. 2.41).

Таблица 2.41

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f				
	x_1	x_2	x_3	000	001	010	101	111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	+	+			
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}$	0	-	0	+		+		
$x_1 x_3$	1	-	1				+	+
$\overline{x_2}\,x_3.$	-	0	1		+		+	

Шаг 2. Выбираем слагаемое 2 (табл. 2.42).

Таблица 2.42

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f				
	x_1	x_2	x_3	000	001	010	101	111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	+	+			
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}$	0	-	0	+		+		
$x_1 x_3$	1	-	1				+	+
$\overline{x_2}\,x_3.$	-	0	1		+		+	

Шаг 3. Выбираем слагаемое 1(табл. 2.43).

Таблица 2.43

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f				
	x_1	x_2	x_3	000	001	010	101	111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	+	+			
$\overline{x_1}\,\overline{x_3}$	0	-	0	+		+		
x_1x_3	1	-	1				+	+
$\overline{x_2}\,x_3.$	-	0	1		+		+	

В результате получаем МДНФ

$$f(x_1,\,x_2,\,x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1x_3.$$

Алгоритм минимизации функций в классе ДНФ.

1) Строим СДНФ функции f.

2) Строим сокращенную ДНФ функции f.

3) С помощью матрицы покрытий и решеточного выражения строим все ТДНФ функции f.

4) Среди построенных ТДНФ выбираем все минимальные ДНФ функции f.

Пример 2.32.

В классе нормальных форм минимизировать функцию $f = 01011110$.

Решение.

Для построения сокращенной ДНФ используем алгоритм Куайна:

1) Строим СДНФ для функции f. Таблица значений имеет следующий вид (табл. 2.44). СДНФ (1): № 1, 3, 4, 5, 6 (табл. 2.45).

Таблица 2.44

№ набора	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Таблица 2.45

№ слагаемого	Слагаемое СДНФ
1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$
2	$\overline{x_1}\,x_2\,x_3$
3	$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$
4	$x_1\,\overline{x_2}\,x_3$
5	$x_1\,x_2\,\overline{x_3}$

2) Проводим все операции неполного склеивания (табл. 2.46).

Таблица 2.46

Слагаемые	Склеивание по	Результат
1, 2	x_2	$\overline{x_1}\,x_3$
1, 4	x_1	$\overline{x_2}\,x_3$
3, 4	x_3	$x_1\,\overline{x_2}$
3, 5	x_2	$x_1\,\overline{x_3}$

Дальнейшее склеивание невозможно. Все слагаемые предыдущего шага участвовали в операции склеивания, поэтому сокращенная ДНФ имеет вид

$$f = \overline{x_1}\,x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2} \vee x_1\,\overline{x_3}.$$

3) Строим матрицу покрытий (табл. 2.47).

Таблица 2.47

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f				
	x_1	x_2	x_3	001	011	100	101	110
$\overline{x_1}\,x_3$	0	-	1	+	+			
$\overline{x_2}\,x_3$	-	0	1	+			+	
$x_1\,\overline{x_2}$	1	0	-			+	+	
$x_1\,\overline{x_3}$	1	-	0			+		+

Последовательно выбираем слагаемые: № 4, 1, 2 (табл. 2.48).

Таблица 2.48

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f				
	x_1	x_2	x_3	001	011	100	101	110
$\overline{x_1}\,x_3$	0	-	1	+	+			
$\overline{x_2}\,x_3$	-	0	1	+			+	
$x_1\,\overline{x_2}$	1	0	-			+	+	
$x_1\,\overline{x_3}$	1	-	0			+		+

В результате МДНФ имеет вид $f = \overline{x_1}\,x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_3}$.

Пример 2.33.

Построить МДНФ функции f = 11011011.

Решение.

Для построения сокращенной ДНФ используем минимизационную карту.

Шаг 1. Строим минимизационную карту (табл. 2.49).

Таблица 2.49

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	2	2	0
3	0	1	1	1	1	3	3	1
4	1	0	0	2	2	0	4	1
5	1	0	1	2	3	1	5	0
6	1	1	0	3	2	2	6	1
7	1	1	1	3	3	3	7	1

Шаг 2. Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в ноль (табл. 2.50).

Таблица 2.50

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	2	2	0
3	0	1	1	1	1	3	3	1
4	1	0	0	2	2	0	4	1
5	1	0	1	2	3	1	5	0
6	1	1	0	3	2	2	6	1
7	1	1	1	3	3	3	7	1

Шаг 3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге (табл. 2.51).

Таблица 2.51

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	2	2	0
3	0	1	1	1	1	3	3	1
4	1	0	0	2	2	0	4	1
5	1	0	1	2	3	1	5	0
6	1	1	0	3	2	2	6	1
7	1	1	1	3	3	3	7	1

Шаг 4. В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их (табл. 2.52).

Таблица 2.52

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**2**	**0**
3	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**
4	**1**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**4**	**1**
5	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**	**0**
6	**1**	**1**	**0**	**3**	**2**	**2**	**6**	**1**
7	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**7**	**1**

Шаг 5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного (табл. 2.53).

Таблица 2.53

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**2**	**0**
3	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**1**
4	**1**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**4**	**1**
5	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**	**0**
6	**1**	**1**	**0**	**3**	**2**	**2**	**6**	**1**
7	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**7**	**1**

Шаг 6. Сокращенная ДНФ имеет вид

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,x_3 \vee x_1 \overline{x_3} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2 x_3.$$

Строим матрицу покрытий (табл. 2.54).

Таблица 2.54

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f					
	x_1	x_2	x_3	000	001	011	100	110	111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	+	+				
$x_1 x_2$	1	1	-					+	+
$\overline{x_1}\,x_3$	0	-	1		+	+			
$x_1 \overline{x_3}$	1	-	0				+	+	
$\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	-	0	0	+			+		
$x_2 x_3.$	-	1	1			+			+

Последовательно выбираем слагаемые: № 1, 2, 5, 6 (табл. 2.55).

Таблица 2.55

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты			Конституенты единицы функции f					
	x_1	x_2	x_3	000	001	011	100	110	111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	0	0	-	+	+				
$x_1\, x_2$	1	1	-					+	+
$\overline{x_1}\, x_3$	0	-	1		+	+			
$x_1\, \overline{x_3}$	1	-	0				+	+	
$\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	-	0	0	+			+		
$x_2 x_3$.	-	1	1			+			+

В результате МДНФ имеет вид $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2 x_3$.

2.3.5. Полные системы булевых функций

Определение 2.28. ***Система булевых функций*** $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *называется* ***полной****, если любая булева функция может быть выражена через функции* $f_1, f_2, \ldots, fn$ *с помощью суперпозиций.*

Пример 2.34.

Из определения полной системы булевых функций следует, что система $\{\wedge, \vee, \neg\}$ является полной, т.к. любая булева функция может быть представима в виде СДНФ и/или СКНФ.

Дадим определение суперпозиции функций.

Определение 2.29. $K^0 = \{f_1(x_1, x_2, ..., x_{k_1}), f_2(x_1, x_2, ..., x_{k_2}), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_{k_m})\}$ *– конечная система булевых функций. Функция f называется* ***суперпозицией ранга 1*** *(или элементарной суперпозицией) функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, если f может быть получена одним из следующих способов:*

1) *переименованием некоторой переменной x_j какой-нибудь функции f_i, т.е. $f = f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_{k1})$, где y может совпасть с любой переменной;*

2) *подстановкой некоторой функции f_l ($1 \le lm$) вместо какой-либо переменной x_j любой из функций $fi \in K^0$, т.е. $f = f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, f_l(x_1, x_2, \ldots, x_{k1}), x_{j+1}, ..., x_{ki})$.*

Определение 2.30. Суперпозиции ранга 1 образуют класс функций K^1. Класс функций, получающихся из функций класса K^{r-1} суперпозиций ранга r-1 с помощью элементарных суперпозиций, называется ***классом функций K^r суперпозиций ранга r****. Суперпозициями функций из K^0 называются функции, входящие в какой-либо из классов K^r.*

Определение 2.31. Класс (множество) K булевых функций называется ***функционально замкнутым****, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.*

Пример 2.35.

1) Четыре булевы функции одной переменной ($f_1 = 00, f_2 = 11, f_3 = 01, f_4 = 10$) образуют замкнутый класс.

2) Булевы функции $f_1 = x$ и $f_2 = \overline{x}$ образуют замкнутый класс.

Теорема. Класс $\boldsymbol{T_0} = \{f \mid f(0, 0, \ldots, 0) = 0\}$ *функций, сохраняющих константу ноль на нулевом наборе, замкнут относительно суперпозиций.*

Теорема. Класс $\boldsymbol{T_1} = \{ f \mid f(1, 1, \ldots, 1) = 1\}$ *функций, сохраняющих константу один на единичном наборе, замкнут относительно суперпозиций.*

Двойственные функции.

Определение 2.32. ***Двойственной*** *для функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется функция*

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

Пример 2.36.

Построить функцию, двойственную данной:

1) $f = x \vee y$;

2) $f = x \to y$.

Решение.

1) $f^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} = x \wedge y.$

2) $f^* = \overline{\overline{x} \to \overline{y}} = \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{\overline{x}}} \wedge \overline{\overline{y}} = \overline{x} \wedge y.$

Определение 2.33. Функция, совпадающая со своей двойственной, называется ***самодвойственной***.

Утверждение. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *самодвойственна, то функция* $\overline{f}$ *тоже самодвойственна.*

Утверждение. Чтобы функция была самодвойственной, необходимо и достаточно, чтобы на всяких двух противоположных наборах она принимала разные значения.

Противоположными называются те наборы, которые в сумме дают двоичный код числа $(2^n - 1)$.

Пример 2.37.

Выяснить, являются ли функции самодвойственными:

1) $f = (\overline{x} \approx y) \to \overline{z}$;

2) $f = 01110010$.

Решение.

1) Строим таблицу истинности для функции $f = (\overline{x} \approx y) \to \overline{z}$ (табл. 2.56).

Так как наборы (0, 0, 0) и (1, 1, 1) являются противоположными, а $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1)$, то данная функция не является самодвойственной.

Таблица 2.56

№ набора	x	y	z	$\bar{x}$	$(\bar{x} \approx y)$	$\bar{z}$	$f = (\bar{x} \approx y) \to \bar{z}$
0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
2	0	1	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	0	0
4	1	0	0	0	1	1	1
5	1	0	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	1	1
7	1	1	1	0	0	0	1

2) Строим таблицу значений для функции f = 01110001 (табл. 2.57).

Таблица 2.57

№ набора	x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Перечислим пары противоположных наборов: (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4). Легко убедиться по таблице, что на всяких двух противоположных наборах функция принимает разные значения. Следовательно, функция является самодвойственной.

Теорема. Класс $\boldsymbol{S} = \{f \mid f = f^*\}$ *самодвойственных функций замкнут относительно суперпозиций.*

Линейные функции.

Определение 2.34. ***Арифметические функции*** *в алгебре логики – это сложение по модулю два и умножение (конъюнкция).*

Определение 2.35. ***Многочленом Жегалкина*** *называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени:* $\sum X_{t_1}...X_{i_k} + a_j$, *причем на каждом наборе* $<i_1, \ldots, i_k>$ *все* a_{ij} $(j = 1, \ldots, k)$ *различны,* $a_j \in \{0, 1\}$.

Теорема. Всякую булеву функцию можно представить единственным полиномом Жегалкина.

Многочлен Жегалкина можно получить различными способами. Остановимся на рассмотрении построения многочлена Жегалкина с помощью треугольника Паскаля. Рассмотрим алгоритм на примере.

Пример 2.38.

Построить многочлен Жегалкина для функции f = 10011110.

Решение.

Шаг 1. Строим таблицу (табл. 2.58). Первый столбец содержит возможные слагаемые полинома Жегалкина. Нулевому набору всегда соответствует слагаемое 1. Остальным наборам соответствует слагаемое, представляющее собой конъюнкцию переменных, которые на данном наборе принимают значение 1. Следующие n столбцов – всевозможные наборы из 0 и 1, соответствующие переменным. Далее столбец значений функции f. Функция g является вспомогательной, поэтому изначально этот столбец не заполнен.

Таблица 2.58

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	1		
x_3	0	0	1	0		
x_2	0	1	0	0		
x_2x_3	0	1	1	1		
x_1	1	0	0	1		
x_1x_3	1	0	1	1		
x_1x_2	1	1	0	1		
$x_1x_2x_3$	1	1	1	0		

Шаг 2. Построение треугольника Паскаля. Верхняя сторона треугольника есть функция f. Любой другой элемент треугольника есть сумма по модулю два двух соседних элементов предыдущей строки. Левая сторона треугольника представляет собой значение вспомогательной функции g (табл. 2.59).

Таблица 2.59

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	1	1	$f =$ 1 0 0 1 1 1 1 0
x_3	0	0	1	0	1	1 0 1 0 0 0 1
x_2	0	1	0	0	1	1 1 1 0 0 1
x_2x_3	0	1	1	1	0	0 0 1 0 1
x_1	1	0	0	1	0	0 1 1 1
x_1x_3	1	0	1	1	1	1 0 0
x_1x_2	1	1	0	1	1	1 0
$x_1x_2x_3$	1	1	1	0	1	1

Шаг 3. Построение полинома Жегалкина. В полином войдут только те слагаемые, которым соответствует единица во вспомогательной функции g.

Для данной функции многочлен Жегалкина имеет вид

$$f = 1 + x_3 + x_2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3.$$

*Определение 2.36. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **линейной**, если многочлен Жегалкина для нее имеет следующий линейный относительно переменных вид:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1},$$

где каждое a_i равно 0 или 1.

Булева функция из рассмотренного выше примера не является линейной.

Теорема. Класс $\mathbf{L} = \{f \mid f = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,\ a_i \in \{0, 1\}\}$ *линейных функций замкнут относительно суперпозиций.*

Монотонные функции.

Определение 2.37. Если $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *и* $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *– наборы длины* n *из 0 и 1, то* $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$*, если* $a_1 \le b_1, \ldots, a_n \le b_n$.

Пример 2.39.

Наборы (0, 1, 0) и (1, 1, 0) сравнимы, причём (0, 1, 0) ≤ (1, 1, 0).

Наборы (0, 1) и (1, 0) несравнимы. Также несравнимы наборы (0, 1) и (1, 1, 0).

Определение 2.38. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется* ***монотонной****, если для всяких наборов* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *и* $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *условие* $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ *влечет* $\boldsymbol{f(a) \le f(b)}$.

Утверждение. Функция монотонна тогда и только тогда, когда ее сокращенная ДНФ не содержит отрицаний.

Следствие. Функция монотонна тогда и только тогда, когда ее МДНФ не содержит отрицаний.

Пример 2.40.

Выяснить, являются ли функции монотонными:

1) $f = 00100110$;

2) $f = 00110111$.

Решение.

1) Сокращенная ДНФ для функции $f = 00100110$ имеет вид $f = x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3$. Поскольку сокращенная ДНФ содержит отрицания, то функция не является монотонной.

2) Сокращенная ДНФ для функции $f = 00110111$ имеет вид $f = x_2 \vee x_1x_3$. Поскольку сокращенная ДНФ не содержит отрицаний, то функция является монотонной.

Теорема. Класс $\boldsymbol{M} = \{f \mid a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)\}$ *монотонных функций замкнут относительно суперпозиций.*

Теорема Поста о функциональной полноте.

Теорема Поста (признак полноты системы булевых функций). Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти функционально замкнутых классов* T_0, T_1, L, M, S *нашлась хотя бы одна функция* f_i *из системы, не принадлежащая этому классу.*

Пример 2.41.

Выяснить, к каким функционально замкнутым классам принадлежит булева функция $f = 01001110$, используя теорему Поста.

Решение.

Строим таблицу значений и треугольник Паскаля (табл. 2.60).

Таблица 2.60

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	0	0	f = 0 1 0 0 1 1 1 0
x_3	0	0	1	1	1	1 1 0 1 0 0 1
x_2	0	1	0	0	0	0 1 1 1 0 1
x_2x_3	0	1	1	0	1	1 0 0 1 1
x_1	1	0	0	1	1	1 0 1 0
x_1x_3	1	0	1	1	1	1 1 1
x_1x_2	1	1	0	1	0	0 0
$x_1x_2x_3$	1	1	1	0	0	0

Полином Жегалкина имеет вид $f = x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_1x_3$.

1) $f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$;

2) $f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \notin T_1$;

3) $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1)$, а наборы (0, 0, 0) и (1, 1, 1) являются противоположными, значит, $f \notin S$;

4) так как в полиноме Жегалкина присутствуют слагаемые, представляющие собой конъюнкцию нескольких переменных, то $f \notin L$;

5) сокращенная ДНФ функции имеет вид $f = x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \vee \overline{x_2}\, x_3$, т.к. она содержит отрицания, значит, $f \notin M$.

Сведем полученные данные:

	T_0	T_1	S	L	M
f	+	-	-	-	-

Пример 2.42.

Доказать полноту системы $\{+, \vee, 1\}$.

Решение.

Введем обозначения: $f_1 = x_1 + x_2$, $f_2 = x_1 \vee x_2$, $f_3 = 1$. Построим единую таблицу для функций (табл. 2.61).

Таблица 2.61

Слагаемые	№ набора	x_1	x_2	$f_1 = x_1 + x_2$	Δ Паскаля	$f_2 = x_1 \vee x_2$	Δ Паскаля	$f_3 = 1$	Δ Паскаля
1	0	0	0	0	0 1 1 0	0	0 1 1 1	1	1 1 1 1
x_2	1	0	1	1	1 0 1	1	1 0 0	1	0 0 0
x_1	2	1	0	1	1 1	1	1 0	1	0 0
x_1x_2	3	1	1	0	0	1	1	1	0

Полином Жегалкина:

$f_1 = x_1 + x_2$;

$f_2 = x_2 + x_1 + x_1x_2$;

$f_3 = 1$.

Сведем полученные данные:

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	-	+	-	-
f_2	+	+	-	+	-
f_3	-	+	+	+	-

Поскольку для каждого из пяти функционально замкнутых классов нашлась функция, не принадлежащая этому классу (в каждом столбце имеется хотя бы один минус), то система булевых функций $\{+, \vee, 1\}$ является полной.

2.3.6. Существенные и несущественные переменные. Производная булевой функции первого порядка. Вес переменной

Определение 2.39. *Булева функция $f \in Pn$ **существенно зависит** от переменной x_i, если существует такой набор значений $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, что*

$$f(a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_n) \neq f(a_1, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n).$$

*В этом случае x_i называют **существенной переменной**, в противном случае x_i называют **несущественной переменной**.*

Определение 2.40. ***Производная первого порядка** $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ от булевой функции f по переменной x_i есть сумма по модулю 2 соответствующих остаточных функций:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \oplus f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n),$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ – единичная остаточная функция; $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ – нулевая остаточная функция; $\oplus$ – сумма по модулю 2.

Единичная остаточная функция получается в результате приравнивания переменной x_i единице, нулевая – в результате приравнивания x_i нулю.

Определение 2.41. ***Весом производной** $P(\partial f / \partial x_i)$ от булевой функции называется число конституент этой производной.*

Утверждение. Чем больше вес производной $P(\partial f / \partial x_i)$, тем больше функция f зависит от переменной x_i.

Пример 2.43.

Определить переменную x_i, по которой производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ функции

$$f(x_1, ..., x_5) = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$$

имеет минимальный (максимальный) вес, т.е. функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ зависит от нее менее (более) существенно.

Решение.

Определим вес каждой переменной, найдя сначала соответствующую производную.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{x}_2 x_3 \vee x_3 \bar{x}_5 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5) \oplus (\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5).$$

Для вычисления веса производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, зависящей от четырех переменных x_2, x_3, x_4, x_5, составим таблицу истинности, в которой обозначим за F_1 остаточную нулевую функцию (первая скобка), за F_2 – остаточную единичную функцию (вторая скобка). Итоговым столбцом является значение производной первого порядка по переменной x_1. Тогда производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ можно задать в виде таблицы истинности (табл. 2.62). Вес производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ равен числу единиц в итоговом столбце этой таблицы.

Итак, $P\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 7.$

Аналогично вычислим вес производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 2, 3, 4, 5$).

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5) \oplus (x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5), \; P\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 5;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_5) \oplus (\bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5), \; P\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 8;$$

Таблица 2.62

№ набора	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_2 x_3$	$x_3 \bar{x}_5$	$x_2 x_4$	$\bar{x}_2 x_3 x_5$	$\bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$	F_1	$\bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_2 x_3 x_5$	$\bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$	F_2	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	**1**	0	0	1	**1**	0
2	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	**0**	1	0	0	**1**	1
3	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**0**	1	0	0	**1**	1
4	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	**1**	0	0	0	**0**	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	**1**	0	1	0	**1**	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	**1**	0	0	0	**0**	1
7	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	**1**	0	1	0	**1**	0
8	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**	0
9	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	**1**	0	0	1	**1**	0
10	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	**1**	1	0	0	**1**	0
11	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	**1**	1	0	0	**1**	0
12	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	**1**	0	0	0	**0**	1
13	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**	0
14	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	**1**	0	0	0	**0**	1
15	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	**1**	0	0	0	**0**	1

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \left(x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_5 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3x_5\right)\oplus$$

$$\oplus\left(x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_2x_3x_5 \vee \bar{x}_3x_5\right),\quad P\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 5;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = \left(x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_3\bar{x}_4\right)\oplus$$

$$\oplus\left(x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_3x_1 \vee x_1x_2x_4\right),\quad P\left(\frac{\partial f}{\partial x_5}\right) = 7.$$

Выяснили, что минимальное значение $\min P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ получено при дифференцировании функции f по переменным x_2 и x_4, максимальное значение $\max P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ получено при дифференцировании функции f по переменной x_3.

2.4. Проверочный тест по теме «Булевы функции»

Вопрос 1. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = x_1 \rightarrow x_2$.

Вопрос 2. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = x_1 \wedge x_2$.

Вопрос 3. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = x_1 \oplus x_2$.

Вопрос 4. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = x_1 \approx x_2$.

Вопрос 5. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = x_1 \rightarrow \overline{x_2}$.

Вопрос 6. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = \overline{x_1} \rightarrow x_2$.

Вопрос 7. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = \overline{x_1} \approx x_2$.

Вопрос 8. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = x_1 \oplus \overline{x_2}$.

Вопрос 9. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = x_1 \vee \overline{x_2}$.

Вопрос 10. Запишите, какая строка значений соответствует булевой функции $f = \overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$.

Вопрос 11. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 11110111.

Вопрос 12. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 00000111.

Вопрос 13. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 11111101.

Вопрос 14. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 01111111.

Вопрос 15. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 11111011.

Вопрос 16. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 10000111.

Вопрос 17. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 11100001.

Вопрос 18. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 01111000.

Вопрос 19. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 11110110.

Вопрос 20. Запишите полином Жегалкина, соответствующий булевой функции *f* = 11111101.

Вопрос 21. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 01011000$?

а) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$;

б) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,x_3$;

в) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2 \overline{x_3}$.

Вопрос 22. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 10001100$?

а) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3$;

б) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3$;

в) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3$.

Вопрос 23. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 11100000$?

а) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3$;

б) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;

в) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

Вопрос 24. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 11000010$?

а) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3$;

б) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3$;

в) $f = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3$.

Вопрос 25. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 10101000$?

а) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;

б) $f = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$;

в) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3$.

Вопрос 26. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 01010100$?

а) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \underline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3$;

б) $f = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$;

в) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3$.

Вопрос 27. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 00010101$?

а) $f = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$;

б) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;

в) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3$.

Вопрос 28. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 00111000$?

а) $f = \overline{x_1} x_2 \underline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$;

б) $f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$;

в) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$.

Вопрос 29. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 00101010$?

а) $f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$;

б) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$;

в) $f = \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Вопрос 30. Какая СДНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 10010100$?

а) $f = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3$;

б) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$;

в) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$.

Вопрос 31. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 10100111$?

а) $f = \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$;

б) $f = \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$;

в) $f = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$.

Вопрос 32. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 01111001$?

а) $f = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)$;

б) $f = \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$;

в) $f = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$.

Вопрос 33. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 00011111$?

а) $f = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)$;

б) $f = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)$;

в) $f = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$.

Вопрос 34. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 00111101$?

а) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

б) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

в) $f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$.

Вопрос 35. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 01010111$?

а) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$;

б) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

в) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$.

Вопрос 36. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 10101011$?

а) $f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$;

б) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

в) $f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$.

Вопрос 37. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 11101010$?

а) $f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$;

б) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$;

в) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$.

Вопрос 38. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 11000111$?

а) $f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$;

б) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

в) $f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$.

Вопрос 39. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 11010101$?

а) $f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

б) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$;

в) $f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$.

Вопрос 40. Какая СКНФ соответствует булевой функции $F(x_1, x_2, x_3) = 01101011$?

а) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$;

б) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$;

в) $f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$.

Вопрос 41. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 01011000$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 42. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 01010100$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 43. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 00010101$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 44. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 00111000$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 45. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 00101010$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 46. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) =11110000$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 47. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 00001111$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 48. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 00000000$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 49. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 11111111$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 50. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 01010101$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 51. К каким из функционально-замкнутых классов T_0, T_1, M, S принадлежит булева функция $F(x_1, x_2, x_3) = 00110011$?

а) T_0; в) M;
б) T_1; г) S.

Вопрос 52. Установить соответствие между понятием и его определением.

1) КНФ, в которой различны все члены конъюнкции, различны все члены каждой дизъюнкции, ни одна дизъюнкция не содержит переменную вместе с отрицанием этой переменной и каждая дизъюнкция содержит все переменные	а) Совершенная конъюнктивная нормальная форма
2) ДНФ, в которой различны все члены дизъюнкции, различны все члены каждой конъюнкции, ни одна конъюнкция не содержит переменную вместе с отрицанием этой переменной и каждая конъюнкция содержит все переменные	б) Совершенная дизъюнктивная нормальная форма
3) ДНФ, содержащая минимальное число переменных по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими одну и ту же функцию	в) Минимальная дизъюнктивная нормальная форма

Вопрос 53. Установить соответствие между формулой и строкой значений булевой функции.

1) $f = x_1 \to x_2$	а) 1101
2) $f = x_1 \wedge x_2$	б) 0001
3) $f = x_1 \oplus x_2$	в) 0110

Вопрос 54. Установить соответствие между формулой и строкой значений булевой функции.

1) $f = x_1 \approx x_2$	а) 1001
2) $f = x_1 \to \overline{x_2}$	б) 1110
3) $f = \overline{x_1} \to x_2$	в) 0111

Вопрос 55. Установить соответствие между формулой и строкой значений булевой функции.

1) $f = \overline{x_1} \approx x_2$	а) 0110
2) $f = x_1 \oplus \overline{x_2}$	б) 1001
3) $f = x_1 \vee \overline{x_2}$	в) 1011

Вопрос 56. В каком порядке выполняются этапы построения сокращенной ДНФ в соответствии с алгоритмом Куайна?

а) Получить СДНФ.

б) Провести все операции неполного склеивания.

в) Провести все операции поглощения.

Вопрос 57. В каком порядке выполняются этапы построения сокращенной ДНФ в классе дизъюнктивных нормальных форм на этапе чередования работ по строкам и столбцам?

а) Вычеркиваются строки, в которых функция обращается в ноль.

б) В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркивают те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге.

в) В сохранившихся строках выбирают «значения» наименьших множителей конъюнкции и обводят их кружочками.

г) Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркивают все, кроме одного.

д) С помощью обведенных чисел образуют конъюнкции, для чего переводят каждое число в двоичную систему.

е) Составляют дизъюнкции полученных конъюнкций.

2.5. Логика предикатов

2.5.1. Основные понятия, связанные с предикатами

В высказывании все четко: это конкретное утверждение о конкретных объектах – истинное или ложное. Предикат – предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся: о нем нельзя судить, истинно оно или ложно.

Логика предикатов представляет собой развитие логики высказываний. С помощью формул логики высказываний можно описать и исследовать структуру сложных высказываний, установить их истинность или ложность в зависимости от истинности или ложности входящих в нее простых высказываний. Для описания внутренней логической структуры простых высказываний используется понятие предиката.

Определение 2.42. ***N-местным предикатом****, определенным на множествах M_1, M_2, …, M_n, называется предложение, содержащее* ***n*** *переменных x_1, x_2, …, x_n, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств M_1, M_2, …, M_n соответственно.*

Чаще всего предикаты обозначают большими латинскими буквами, а число переменных указывает на его размерность: $P(x_1, x_2, …, x_n)$.

Предикат также называют функцией-высказыванием.

Пример 2.44.

Рассмотрим три высказывания:

A – «Рубль – валюта России»;

B – «Доллар – валюта России»;

C – «Доллар – валюта США».

Высказывания A и C истинны, B – ложно. Если вместо конкретных наименований валюты в выражениях A, B подставить предметную переменную x и определить ее на множестве наименований денежных единиц M, то получим одноместный предикат

$P(x)$: «*x – валюта России*», где $x \in M$.

Если же в высказывания подставить не только предметную переменную x, определенную на множестве M, но и вместо наименований стран ввести предметную переменную y, определенную на множестве названий стран Y, то получим двуместный предикат:

$Q(x, y)$: «*x – валюта страны y*», где $x \in M$, $y \in Y$.

Чаще всего предикаты задают высказывательными формами, как показано выше. Однако предикат можно задать таблицей. Такой способ пригоден только для предикатов, область определения которых – конечное множество.

Пример 2.45.

Таблица 2.63

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	И	И	Л	И	Л

Пусть задан одноместный предикат $P(x)$, $x \in M$, где $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Значение предиката можно задать в виде табл. 2.63.

Пример 2.46.

Предикат задан высказывательной формой $P(x)$: «*в слове x буква «а» встречается не более двух раз*», $x \in M$, где M = {конь, стол, карандаш, зал, чаша, барабан}.

Построим таблицу значений для данного предиката (табл. 2.64).

Таблица 2.64

x	конь	стол	карандаш	зал	чаша	барабан
$P(x)$	И	И	Л	И	И	Л

Определение 2.43. ***Множеством истинности*** *предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется совокупность всех упорядоченных n-систем $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в которых $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n$ таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание при подстановке $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$.*

Это множество будем обозначать P^+.

Пример 2.47.

Определить множество истинности предикатов, заданных на соответствующих множествах:

1) $P(x)$: «x кратно 3», $x \in M$, *где* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
2) $G(x, y)$: «$x^2 + y^2 < 0$», $(x, y) \in R \times R$;
3) $Q(x)$: «$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$», $x \in R$.

R – множество действительных чисел.

Решение.

1) $P^+ = \{3, 6, 9\}$;
2) $G^+ = \varnothing$;
3) $Q^+ = R$.

2.5.2. Классификация предикатов

Определение 2.44. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется:

1) ***тождественно-истинным****, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;*

2) ***тождественно-ложным,*** *если при любой подстановке вместо переменных* x_1, x_2, …, x_n *любых конкретных предметов из множеств* M_1, M_2, …, M_n *соответственно он превращается в ложное высказывание;*

3) ***выполнимым (опровержимым),*** *если существует по крайней мере один набор конкретных предметов, при подстановке которого вместо соответствующих переменных в предикат последний обращается в истинное (ложное) высказывание.*

С точки зрения множества истинности предиката истинны следующие утверждения.

Утверждения.

1) *Если предикат* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *заданный на множествах* M_1, M_2, …, M_n, *является тождественно-истинным, то его множество истинности* $P^+ = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

2) *Если предикат* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *заданный на множествах* M_1, M_2, …, M_n, *является тождественно-ложным, то его множество истинности* $P^+ = \varnothing$.

3) *Если предикат* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *заданный на множествах* M_1, M_2, …, M_n, *является выполнимым, то его множество истинности* $P^+ \neq \varnothing$.

4) *Если предикат* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *заданный на множествах* M_1, M_2, …, M_n, *является опровержимым, то его множество истинности* $P^+ \neq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

Определение 2.45. ***Два n-местных предиката*** $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и* $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *заданных над одними и теми же множествами* M_1, M_2, …, M_n, *называются* ***равносильными****, если набор элементов* $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ *превращает первый предикат в истинное высказывание* $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *в том и только в том случае, когда этот же набор превращает в истинное высказывание* $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *второй предикат.*

Утверждение о равносильности двух предикатов P и Q символически будем записывать так: $P \Leftrightarrow Q$.

Пример 2.48.

Необходимо решить уравнение (или, другими словами, найти множество истинности предиката) $4x - 2 = -3x - 9$.

Решение.

Делая равносильные преобразования, найдем множество истинности предиката:

$4x - 2 = -3x - 9 \Leftrightarrow 4x + 3x = -9 + 2 \Leftrightarrow x = -1$.

Определение 2.46. Предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *заданный над множествами* M_1, M_2, …, M_n, *называется* ***следствием предиката*** $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех наборах значений предметных переменных* *на соответствующих множествах, на которых в истинное высказывание превращается предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Другими словами (в терминах множеств истинности), можно сказать, что предикат Q является следствием предиката P тогда и только тогда, когда $P^+ \subseteq Q^+$.

Теорема. *Каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката, заданных на одних и тех же множествах, равносильны. Обратно, всякий предикат, равносильный тождественно истинному (тождественно ложному) предикату, сам является тождественно истинным (тождественно ложным) предикатом.*

Теорема. *Каждый тождественно истинный n-местный предикат является следствием любого другого n-местного предиката, определенного на тех же множествах. Каждый n-местный предикат является следствием любого тождественно ложного n-местного предиката, определенного на тех же множествах.*

2.5.3. Логические операции над предикатами

Над предикатами можно проделывать те же самые логические операции, что и над высказываниями. Рассмотрим основные три операции в их связи с операциями над множествами.

Определение 2.47. ***Отрицанием*** *n-местного предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется новый n-местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который превращается в истинное высказывание при всех тех значениях предметных переменных, при которых исходный предикат превращается в ложное высказывание.*

Теорема. *Для n-местного предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, множество истинности его отрицания $\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадает с его дополнением множества истинности данного предиката:*

$$\left(\overline{P}\right)^+ = \overline{P^+} \quad \text{или} \quad \left(\overline{P}\right)^+ = \left(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n\right) \setminus P^+ .$$

Определение 2.48. ***Конъюнкцией*** *n-местного предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, \ldots, N_m$, называется новый $(n + m)$-местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n, N_1, N_2, \ldots, N_m$, обозначаемый $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинные высказывания.*

Теорема. Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, множество истинности конъюнкции $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадает с пересечением множеств истинности исходных предикатов:

$$(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+ .$$

Определение 2.49. ***Дизъюнкцией*** *n-местного предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, \ldots, N_m$, называется новый $(n + m)$-местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n, N_1, N_2, \ldots, N_m$, обозначаемый $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращается по меньшей мере один исходный предикат.*

Теорема. Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, множество истинности дизъюнкции $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадает с объединением множеств истинности исходных предикатов:

$$(P \wedge Q)^+ = P^+ \cup Q^+ .$$

2.5.4. Кванторные операции над предикатами

Специфическая природа предикатов позволяет выполнять над ними такие операции, которые не имеют аналогов среди операций над высказываниями. Имеются в виду две кванторные операции над предикатами.

Квантор общности.

Для превращения одноместного предиката в высказывание нужно вместо его переменной подставить какой-нибудь конкретный предмет из области задания предиката. Имеется еще один способ для такого превращения – это применение к предикату операций связывания квантором общности или квантором существования. Каждая из этих операций ставит в соответствие одноместному предикату некоторое высказывание, истинное или ложное в зависимости от исходного предиката.

Определение 2.50. ***Операцией связывания квантором общности*** *называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$, которое истинно в том и только в том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен, и ложно в противном случае, т.е.*

$$(\forall x)(P(x)) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x) - \text{тождественно-истинный предикат}, \\ 0, \text{ если } P(x) - \text{опровержимый предикат}. \end{cases}$$

Словесным аналогом квантору общности $\forall$ является: «для любого», «для каждого», «для всякого» и т.п.

В выражении $(\forall x)(P(x))$ переменная x уже перестает быть переменной в обычном смысле этого слова, т.е. вместо нее невозможно подставить какие бы то ни было конкретные значения. Говорят, что переменная x ***связанная***.

Если одноместный предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то высказывание $(\forall x)(P(x))$ эквивалентно конъюнкции $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$.

Пример 2.49.

Пусть x определен на множестве людей M, а $P(x)$ – предикат «*x – смертен*». Дать словесную формулировку предикатной формулы $(\forall x)(P(x))$.

Решение.

Выражение $(\forall x)(P(x))$ означает «*все люди смертны*». Оно не зависит от переменной x, а характеризует всех людей в целом, т.е. выражает суждение относительно всех x множества M.

Определение 2.51. ***Операцией связывания квантором общности*** *по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n \geq 2$) предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах M_1, M_2, …, M_n, сопоставляется новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\forall x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно истинен, и ложное в противном случае, т.е.*

$$(\forall x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n)) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) - \text{тождественно-истинный} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{предикат от } x_1, \\ 0, \text{ если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) - \text{опровержимый предикат от } x_1. \end{cases}$$

Квантор существования.

Определение 2.52. ***Операцией связывания квантором существования*** *называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\exists x)(P(x))$, которое ложно в том и только в том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно ложен, и истинно в противном случае, т.е.*

$$(\exists x)(P(x)) = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x) - \text{тождественно-ложный предикат}, \\ 1, \quad P(x) - \text{выполнимый предикат}. \end{cases}$$

Словесным аналогом квантору существования $\exists$ является: «существует», «найдется» и т.п.

Подобно выражению $(\forall x)(P(x))$, в выражении $(\exists x)(P(x))$ переменная x также перестает быть переменной в обычном смысле этого слова: это ***связанная переменная***.

Если одноместный предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то высказывание $(\exists x)(P(x))$ эквивалентно дизъюнкции $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$.

Пример 2.50.

Пусть $P(x)$ – предикат «x – *четное число*», определенный на множестве N. Дать словесную формулировку высказыванию $(\exists x)(P(x))$, определить его истинность.

Решение.

Исходный предикат $P(x)$: «x – *четное число*» является переменным высказыванием: при подстановке конкретного числа вместо переменной x он превращается в простое высказывание, являющееся истинным или ложным, например, при подстановке числа 5 – ложным, при подстановке числа 10 – истинным. Высказывание $(\exists x)(P(x))$ означает «во множестве натуральных чисел N существует четное число». Поскольку множество N содержит четные числа, то высказывание $(\exists x)(P(x))$ истинно.

Определение 2.53. ***Операцией связывания квантором существования*** *по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n \geq 2$) предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, сопоставляется новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное в противном случае, т.е.*

$$(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n)) = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) - \text{тождественно - ложный} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{предикат от } x_1, \\ 1, \text{ если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) - \text{выполнимый предикат от } x_1. \end{cases}$$

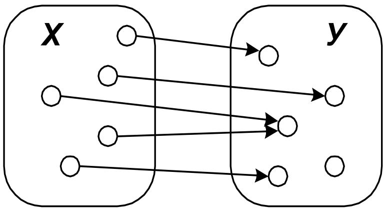
Выше уже было сказано, что переменная, на которую навешен квантор, называется связанной, несвязанная квантором переменная называется ***свободной***. Выражение, на которое навешивается квантор, называется ***областью действия квантора***, и все вхождения переменной, на которую навешен квантор, в это выражение являются связанными. На многоместные предикаты можно на разные переменные навешивать различные кванторы, нельзя на одну и ту же переменную навешивать сразу два квантора.

Пример 2.51.

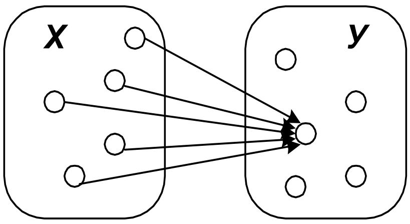
Пусть предикат $P(x, y)$ описывает отношение «*x любит y*» на множестве людей. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на обе переменные. Дать словесную интерпретацию полученных высказываний.

Решение.

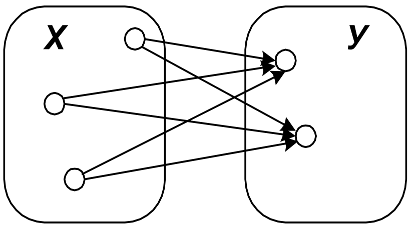
Обозначим предикат «*x любит y*» через ЛЮБИТ(x, y). Предложения, соответствующие различным вариантам навешивания кванторов, проиллюстрированы на рис. 2.3 и 2.4, где x и y показаны на разных множествах, что является условностью и предпринято только для объяснения смысла предложений (реальные множества переменных x и y, очевидно, должны совпадать).



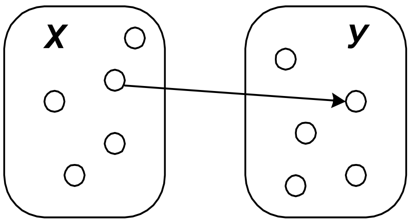
$\forall x\ \exists y$ ЛЮБИТ(x, y) – «для любого человека x существует человекy, которого он любит» или «всякий человек кого-нибудь любит»



$\exists y\ \forall x$ ЛЮБИТ(x, y) – «существует такой человекy, которого любит всякий человек x»

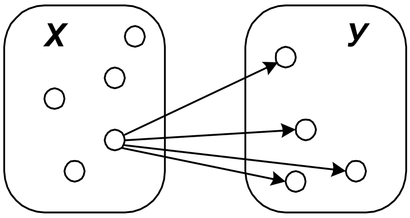


$\forall x\ \forall y$ ЛЮБИТ(x, y) – «все люди любят всех людей»

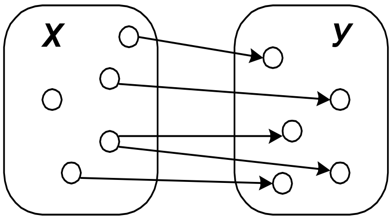


$\exists x\ \exists y$ ЛЮБИТ(x, y) – «существует человек, который кого-то любит»

Рис. 2.3



$\exists x\ \forall y$ ЛЮБИТ(x, y) – «существует человек, который любит всех людей»



$\forall y\ \exists x$ ЛЮБИТ(x, y) – «для всякого человека существует человек, который его любит» или «каждого человека кто-то любит»

Рис. 2.4

Из примера 2.51 можно сделать вывод о том, что перестановка кванторов общности и существования меняет смысл высказывания, т.е. кванторы общности и существования не обладают в общем случае свойством коммутативности. Итак, одноименные кванторы можно менять местами, разноименные кванторы менять местами нельзя.

2.5.5. Численные кванторы

В математике часто встречаются выражения вида «по меньшей мере n» («хотя бы n»), «не более чем n», «n и только n», где n – натуральное число.

Эти выражения, называемые численными кванторами, имеют чисто логический смысл; они могут быть заменены равнозначными выражениями, не содержащими числительных и состоящими только из логических терминов и знака «=», обозначающего тождество (совпадение) объектов.

Пусть $n = 1$.

Предложение «По меньшей мере один объект обладает свойством P» имеет тот же смысл, что и предложение «Существует объект, обладающий свойством P», т.е.

$$\exists x(P(x)). \qquad (2.1)$$

Предложение «Не более чем один объект обладает свойством P» равнозначно предложению «Если есть объекты, обладающие свойством P, то они совпадают», т.е.

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y). \qquad (2.2)$$

Предложение «Один и только один объект обладает свойством P» равнозначно конъюнкции предложений (2.1) и (2.2), т.е.

$$\exists x(P(x)) \wedge \forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y).$$

Рассмотрим случай, когда $n = 2$.

Предложение «По меньшей мере два объекта обладают свойством P» означает то же, что и предложение «Существуют несовпадающие объекты, обладающие свойством P», т.е.

$$\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y). \tag{2.3}$$

Предложение «Не более чем два объекта обладают свойством P» равнозначно предложению «Каковы бы ни были объекты x, y, z, если все они обладают свойством P, то по меньшей мере два из них совпадают», т.е.

$$\forall x \forall y \forall z ((P(x) \wedge P(y) \wedge P(z)) \to (x = y \vee x = z \vee y = z)). \tag{2.4}$$

Предложение «Два и только два объекта обладают свойством P» совпадают по смыслу с конъюнкцией предложений (2.3) и (2.4).

Совершенно аналогично обстоит дело с численными кванторами при $n > 2$.

2.5.6. Формулы логики предикатов

Напомним некоторые из определений и введем понятие формулы логики предикатов аналогично тому, как это было сделано в логике высказываний.

Зададим сначала алфавит символов, из которых будем составлять формулы:

- предметные переменные: x, y, z, x_i, y_i, z_i (i – натуральное число);
- предикатные буквы: P, Q, R, …;
- символы операций (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции, суммы по модулю два);
- кванторы общности и существования;
- вспомогательные символы – скобки, запятая.

Определение 2.54.

1) *Всякий нуль-местный предикатный символ – формула.*
2) *Всякий n-местный предикатный символ – формула.*
3) *Если F – формула, а ξ – предметная переменная, то $\forall\xi(F)$ и $\exists\xi(F)$ – формулы.*
4) *Если F_1 и F_2 – формулы, то $\overline{F}, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \to$ $\to F_2, F_1 \approx F_2, F_1 \oplus F_2$ – формулы.*
5) *Никаких других формул в логике предикатов нет.*

Определение 2.55. Формулы, определенные в п. 1 и 2, называются элементарными. Формулы, не являющиеся элементарными, называют составными.

Пример 2.52.

1) P; $Q(x, y, z)$; $R(x_1, x_2)$ – элементарные формулы.

2) $\forall x(P(x, y, z)$; $\forall x(\exists y(P(x, y, z)))$; $(\overline{\forall x(P(x,y)} \wedge Q)$ – составные формулы.

Формула F в формулах вида $\forall\xi(F)$ и $\exists\xi(F)$ называется соответственно ***областью действия квантора*** $\forall\xi$ или $\exists\xi$.

Определение 2.56. *Вхождение переменной в формулу называется **связанным**, если оно находится в области действия квантора по этой переменной или является вхождением в этот квантор; вхождение, не являющееся связанным, называется **свободным** (область действия квантора всегда однозначно определяется по виду формулы).*

Определение 2.57. *Переменная называется **свободной** в формуле, если хотя бы одно ее вхождение в этой формуле свободно.*

Определение 2.58. *Формулы без свободных предметных переменных называются **замкнутыми**, а формулы, содержащие свободные переменные, – **открытыми**.*

2.5.7. Интерпретация формул логики предикатов

Формулы логики высказываний всегда можно рассматривать как высказывательные формы с высказывательными переменными либо как высказывания. Формулы логики предикатов становятся высказывательными формами с предметными переменными или высказываниями, если задать непустое множество M значений, которые можно приписывать предметным переменным, входящим в формулу, а каждому n-местному предикатному символу поставить в соответствие n-местный предикат, определенный на множестве M (причем двум различным n-местным предикатным символам с одинаковыми предикатными буквами ставится в соответствие один и тот же предикат); нуль-местным предикатным символам независимо от выбора множества M приписывается нуль-местный предикат, т.е. одно из значений истинности {И, Л}.

Если формула не содержит свободных предметных переменных, то, задав множество M и приписав предикатным символам конкретные предикаты, мы получим высказывание (точнее говоря, значение истинности). Если же в формуле есть свободные вхождения предметных переменных, то получим высказывательную форму от этих переменных, которая станет высказыванием, если подставить вместо свободных вхождений переменных элементы множества M.

Обращение формулы в высказывание описанным выше способом будем называть ***интерпретацией*** этой формулы.

Интерпретация замкнутой формулы состоит из следующих шагов:

1) задается множество M;

2) каждой предикатной букве, входящей в n-местный предикатный символ, ставится в соответствие n-местный предикат, определенный на множестве M;

3) каждому нуль-местному предикатному символу приписывается одно из значений истинности.

Если формула ***открытая***, то добавляется еще один шаг:

4) каждому свободному вхождению переменной ставится в соответствие элемент множества M.

Пример 2.53.

Дать интерпретацию формуле $\exists y \forall x P(x, y) \to (Q(x) \wedge R)$.

Решение.

Формула $\exists y \forall x P(x, y) \to (Q(x) \wedge R)$ является открытой, следовательно, интерпретация будет состоять из четырех шагов:

1) Пусть $M = \{1, 2\}$.

2) Предикатной букве P поставим в соответствие двуместный предикат, заданный таблицей (табл. 2.65), а предикатной букве Q – предикат, принимающий следующие значения:

Таблица 2.65

(1; 1)	(1; 2)	(2; 1)	(2; 2)
И	Л	И	Л

1	2
И	Л

3) Предикатному символу R припишем значение И.

4) Свободному вхождению переменной x припишем значение 1.

При такой интерпретации данная формула обращается в *истинное высказывание*.

В самом деле, посылка данной импликации принимает значение И, т.к. согласно таблице 2.65 высказывание $P(1; 1)$ и $P(2; 1)$ – истинные, т.е. существует значение y (равное 1) такое, что при всяком значении x (равном 1 или 2) $P(x; y)$ истинно. Заключение также принимает значение И, т.к. $Q(1)$ и R истинны.

Если же, например, переменной x приписать значение 2, либо символу R – значение Л, либо букве Q – предикат «*быть четным числом*», оставляя все остальное без изменения, то всякий раз данная формула будет получать значение Л.

2.5.8. Классификация формул логики предикатов

Сформулируем классификационные определения для формул логики предикатов. Рассмотрим некоторую интерпретацию с множеством M.

*Определение 2.59. Формула A **выполнима в данной интерпретации**, если существует набор $<a_1, \ldots, a_n>$, $a_i \in M$, значений свободных переменных $x_{i1}, \ldots, x_{in}$ формулы A такой, что $A|<a_1, \ldots, a_n>=$*И.

*Определение 2.60. Формула A **истинна в данной интерпретации**, если она принимает значение* И *на любом наборе $<a_1, \ldots, a_n>$, $a_i \in M$, значений своих свободных переменных $x_{i1}, \ldots, x_{in}$.*

Определение 2.61. Формула A ***выполнима*** *(в логике предикатов), если существует интерпретация, в которой A выполнима.*

Определение 2.62. Формула A, истинная при любой интерпретации, называется ***общезначимой*** *или тождественно-истинной (в логике предикатов).*

Теорема Черча. Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.

Аналогично вводятся понятия опровержимого и тождественно-ложного предиката.

Пример 2.54.

Выяснить, является ли формула $\exists x P(x, y) \to \forall x P(x, y)$ выполнимой и опровержимой.

Решение.

Поскольку на переменную x навешены кванторы, то она является связной. В свою очередь переменная y является свободной. Формула не имеет вхождений нуль-местных предикатов. Значит, интерпретация будет состоять из трех шагов.

Для того чтобы выяснить, является ли формула выполнимой, достаточно привести одну интерпретацию, которая обращает исходную формулу в истинное высказывание.

1) Зададим множество $M = \{0\}$.
2) Зададим предикат $P(x, y)$: «$x = y$».
3) Поскольку заданное множество M имеет единственный элемент, то свободному вхождению переменной y припишем значение 0. При такой интерпретации данная формула обращается в *истинное высказывание*. Заданное множество M имеет единственные элемент, поэтому вместо переменной x мы можем подставлять только его. Действительно, посылка данной импликации $\exists x P(x, y)$ принимает значение И. Заключение импликации $\forall x P(x, y)$ также принимает значение И. Значит, исходная формула является *выполнимой*.

Для того чтобы выяснить, является ли формула опровержимой, достаточно привести одну интерпретацию, которая обращает исходную формулу в ложное высказывание.

1) Зададим множество $M = N$.
2) Зададим предикат $P(x, y)$: «$x < y$».
3) Свободному вхождению переменной y припишем значение 5.

При такой интерпретации данная формула обращается в *ложное высказывание*.

Действительно, посылка данной импликации $\exists x P(x, y)$ принимает значение И, т.к. во множестве натуральных чисел N найдутся числа меньше числа 5. Заключение импликации $\forall x\, P(x,y)$ принимает значение Л, т.к. неверно, что любое натуральное число меньше числа 5.

Значит, исходная формула является *опровержимой*.

Пример 2.55.

Доказать общезначимость формулы $\forall xP(x)\to\exists xP(x)$.

Решение.

Допустим, что P поставлен некоторый предикат на множестве M. Данная формула представляет собой импликацию. Вспомним, что импликация ложна только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно. В нашем случае такая ситуация невозможна, поскольку если не для любого элемента $x\in M$ выполняется предикат P, то автоматически исходная формула обращается в истинное высказывание (независимо от того, какое значение примет заключение импликации). Если же для любого элемента $x\in M$ выполняется предикат P, то, естественно, заключение верно, т.е. найдется $x\in M$ такой, что выполняется предикат P.

Таким образом, исходная формула $\forall xP(x)\to\exists xP(x)$ общезначима.

2.5.9. Равносильность формул логики предикатов

Пусть формулы A и B имеют одно и то же множество свободных переменных.

Определение 2.63. Формулы A и B ***равносильны в данной интерпретации****, если на любом наборе значений свободных переменных они принимают одинаковые значения, т.е. если формулы выражают в данной интерпретации один и тот же предикат.*

Определение 2.64. Формулы A и B ***равносильны на множестве M****, если они равносильны во всех интерпретациях, заданных на множестве M.*

Определение 2.65. Формулы A и B ***равносильны в логике предикатов****, если они равносильны на всех множествах* ($A\equiv B$).

Укажем несколько правил перехода от одних формул к другим, им равносильным.

Для формул логики предикатов сохраняются все равносильности и правила равносильных преобразований логики высказываний.

Утверждение. Всякую формулу логики предикатов, содержащую символы «→» и «≈», можно преобразовать в равносильную ей формулу, не содержащую этих символов.

Кроме этого, существуют следующие правила:

1) *Перенос квантора через отрицание:*

$$\neg(\forall x)A(x)\equiv(\exists x)\neg A(x),\qquad \neg(\exists x)A(x)\equiv(\forall x)\neg A(x).$$

2) *Вынос квантора за скобки:*

$$(\exists x)(A(x)\wedge B)\equiv(\exists x)A(x)\wedge B,\quad (\forall x)(A(x)\wedge B)\equiv(\forall x)A(x)\wedge B,$$
$$(\exists x)(A(x)\vee B)\equiv(\exists x)A(x)\vee B,\quad (\forall x)(A(x)\vee B)\equiv(\forall x)A(x)\vee B,$$
$$(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\equiv(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x),$$
$$(\exists x)(A(x)\vee B(x))\equiv(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x).$$

3) *Перестановка одноименных кванторов:*

$$\forall x\forall yA(x,y)\equiv\forall y\forall xA(x,y),$$
$$\exists x\exists yA(x,y)\equiv\exists y\exists xA(x,y).$$

4) *Переименование связанных переменных.*

Заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, в кванторе и всюду в области действия квантора получаем формулу, равносильную A.

*Определение 2.66. Формула A, равносильная формуле B и не содержащая символов «→», «≈», а также составных формул под знаком отрицания, называется **приведенной формой** формулы B.*

Теорема. Для любой формулы существует равносильная ей приведенная формула, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают.

Пример 2.56.

Преобразовать в приведенную форму формулу $\forall x\exists yP(x,y)\to Q(x)$.

Решение.

$$\forall x\,\exists y\,P(x,y)\to Q(x)\equiv\overline{\forall x\,\exists y\,P(x,y)}\vee Q(x)\equiv\exists x\,\forall y\,\overline{P(x,y)}\vee Q(x).$$

*Определение 2.67. Приведённая формула называется **нормальной (ПНФ)**, если она не содержит символов кванторов или все кванторы стоят в ее начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы.*

Пример 2.57.

Преобразовать в ПНФ формулы:

1) $\exists x\,\forall y\,P(x,y)\vee\overline{\forall x\,\exists z\,Q(x,z)}$.

2) $\exists x((\exists yP(y)\wedge Q(x))\to\forall z(R(z)\wedge K(x,z)))$.

Решение.

1) $\exists x\,\forall y\,P(x,y)\vee\overline{\forall x\,\exists z\,Q(x,z)}\equiv\exists x\,\forall y\,P(x,y)\vee\exists x\,\forall z\,\overline{Q(x,z)}\equiv$

$\equiv\exists x\,\forall y\,P(x,y)\vee\exists t\,\forall z\,\overline{Q(t,z)}\equiv\exists x\forall y\exists t\forall z(P(x,y)\vee\overline{Q(t,z)})$.

2) $\exists x((\exists yP(y)\wedge Q(x))\to\forall z(R(z)\wedge K(x,z)))\equiv$

$\equiv\exists x(\overline{(\exists yP(y)\wedge Q(x))}\vee\forall z(R(z)\wedge K(x,z)))\equiv$

$\equiv\exists x(\forall y\overline{P(y)}\vee\overline{Q(x)}\vee\forall z(R(z)\wedge K(x,z)))\equiv$

$\equiv\exists x\forall y\forall z(\overline{P(y)}\vee\overline{Q(x)}\vee(R(z)\wedge K(x,z)))$.

2.6. Проверочный тест по теме «Логика предикатов»

Вопрос 1. Какая из формул логики предикатов является открытой?

а) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$;

б) $(\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x Q(x,z)) \to \exists y \forall z R(y,z)$;

в) $(\exists x \forall z P(x,z) \to \exists y \exists z R(y,z)) \wedge \forall y \forall z \overline{S(y,z)}$.

Вопрос 2. Какая из формул логики предикатов является открытой?

а) $(\exists x \forall z P(x,z) \vee \exists x \exists y \overline{R(x,y)}) \to \forall z Q(z,x)$;

б) $(\exists x \forall z P(x,z) \to \exists y \exists z R(y,z)) \wedge \forall y \forall z \overline{S(y,z)}$;

в) $(\forall x \exists y \forall z P(x,y,z) \vee \forall y Q(y)) \to \exists x \exists z S(x,z)$.

Вопрос 3. Какая из формул логики предикатов является открытой?

а) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$;

б) $(\forall x \forall y P(x,y) \to \exists x \exists y \exists z R(x,y,z)) \to \exists z S(z)$;

в) $\exists x \exists y P(x,y) \approx (Q(x) \to R(y))$.

Вопрос 4. Какая из формул логики предикатов является открытой?

а) $\overline{\forall x \exists y P(x,y)} \to (\forall y \forall z R(y,z,x) \to \overline{\forall z Q(z)})$;

б) $(\forall x \exists y \forall z P(x,y,z) \vee \forall y Q(y)) \to \exists x \exists z S(x,z)$;

в) $(\overline{\exists y P(y)} \to \exists x \exists y R(x,y)) \to \forall z S(z)$.

Вопрос 5. Какая из формул логики предикатов является открытой?

а) $\exists x P(x,y) \wedge (\forall y \exists z R(y,z) \to \forall z S(y,z))$;

б) $(\overline{\exists y P(y)} \to \exists x \exists y R(x,y)) \to \forall z S(z)$;

в) $(\exists x \forall z P(x,z) \to \exists y \exists z R(y,z)) \wedge \forall y \forall z \overline{S(y,z)}$.

Вопрос 6. Какая из формул логики предикатов является замкнутой?

а) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$;

б) $(\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x Q(x,z)) \to \exists y \forall z R(y,z)$;

в) $\overline{\forall x \exists y P(x,y)} \to (\forall y \forall z R(y,z,x) \to \overline{\forall z Q(z)})$.

Вопрос 7. Какая из формул логики предикатов является замкнутой?

а) $\exists x \exists y P(x,y) \approx (Q(x) \to R(y))$;

б) $(\exists x \forall z P(x,z) \to \exists y \exists z R(y,z)) \wedge \forall y \forall z \overline{S(y,z)}$;

в) $\exists x P(x,y) \wedge (\forall y \exists z R(y,z) \to \forall z S(y,z))$.

Вопрос 8. Какая из формул логики предикатов является замкнутой?

а) $(\forall x \exists y \forall z P(x,y,z) \vee \forall y Q(y)) \rightarrow \exists x \exists z S(x,z)$;

б) $(\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x Q(x,z)) \rightarrow \exists y \forall z R(y,z)$;

в) $\exists x \exists y P(x,y) \approx (Q(x) \rightarrow R(y))$.

Вопрос 9. Какая из формул логики предикатов является замкнутой?

а) $\exists x P(x,y) \wedge (\forall y \exists z R(y,z) \rightarrow \forall z S(y,z))$;

б) $\left(\exists x \forall z P(x,z) \vee \exists x \exists y \overline{R(x,y)}\right) \rightarrow \forall z Q(z,x)$;

в) $(\forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y \exists z R(x,y,z)) \rightarrow \exists z S(z)$.

Вопрос 10. Какая из формул логики предикатов является замкнутой?

а) $(\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x Q(x,z)) \rightarrow \exists y \forall z R(y,z)$;

б) $\left(\overline{\exists y P(y)} \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)\right) \rightarrow \forall z S(z)$;

в) $\overline{\forall x \exists y P(x,y)} \rightarrow \left(\forall y \forall z R(y,z,x) \rightarrow \overline{\forall z Q(z)}\right)$.

Вопрос 11. Пусть задан двуместный предикат $P(x, y)$: «$\boldsymbol{x < y}$», заданный на множестве действительных чисел. Укажите соответствие между кванторной формулой логики предикатов и высказывательной формой.

1) $\forall x \forall y\, P(x)$	а) Каждое число ***x*** меньше любого другого числа ***y***
2) $\forall x \exists y\, P(x)$	б) Для любого числа ***x*** найдется такое число ***y***, которое больше его
3) $\exists x \forall y\, P(x)$	в) Существует такое число ***x***, которое меньше любого другого числа ***y***

Вопрос 12. Пусть задан двуместный предикат $P(x, y)$: «$\boldsymbol{x < y}$», заданный на множестве действительных чисел. Укажите соответствие между кванторной формулой логики предикатов и высказывательной формой.

1) $\forall x \exists y\, P(x)$	а) Для любого числа ***x*** найдется такое число ***y***, которое больше его
2) $\exists x \forall y\, P(x)$	б) Существует такое число ***x***, которое меньше любого другого числа ***y***
3) $\forall y \exists x\, P(x)$	в) Для каждого числа ***y*** найдется такое число ***x***, которое меньше его

Вопрос 13. Пусть задан двуместный предикат $P(x, y)$: «$\boldsymbol{x < y}$», заданный на множестве действительных чисел. Укажите соответствие между кванторной формулой логики предикатов и высказывательной формой.

1) $\exists x \forall y\, P(x)$	а) Существует такое число ***x***, которое меньше любого другого числа ***y***
2) $\forall y \exists x\, P(x)$	б) Для каждого числа ***y*** найдется такое число ***x***, которое меньше его
3) $\exists y \forall x\, P(x)$	в) Найдется такое число ***y***, которое больше любого числа ***x***

Вопрос 14. Пусть задан двуместный предикат $P(x, y)$: «$\boldsymbol{x < y}$», заданный на множестве действительных чисел. Укажите соответствие между кванторной формулой логики предикатов и высказывательной формой.

1) $\forall y \exists x\, P(x)$	а) Для каждого числа ***y*** найдется такое число ***x***, которое меньше его
2) $\exists y \forall x\, P(x)$	б) Найдется такое число ***y***, которое больше любого числа ***x***
3) $\exists x \exists y\, P(x)$	в) Найдется такое число ***x***, которое меньше какого-то числа ***y***

Вопрос 15. Пусть задан двуместный предикат $P(x, y)$: «$\boldsymbol{x < y}$», заданный на множестве действительных чисел. Укажите соответствие между кванторной формулой логики предикатов и высказывательной формой.

1) $\forall x \forall y\, P(x)$	а) Каждое число ***x*** меньше любого другого числа ***y***
2) $\exists x \forall y\, P(x)$	б) Существует такое число ***x***, которое меньше любого другого числа ***y***
3) $\exists y \forall x\, P(x)$	в) Найдется такое число ***y***, которое больше любого числа ***x***

Вопрос 16. Пусть задан двуместный предикат $P(x, y)$: «$\boldsymbol{x < y}$», заданный на множестве действительных чисел. Укажите соответствие между кванторной формулой логики предикатов и высказывательной формой.

1) $\forall x \exists y\, P(x)$	а) Для любого числа ***x*** найдется такое число ***y***, которое больше его
2) $\forall y \exists x\, P(x)$	б) Для каждого числа ***y*** найдется такое число ***x***, которое меньше его
3) $\exists x \exists y\, P(x)$	в) Найдется такое число ***x***, которое меньше какого-то числа ***y***

Вопрос 17. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $\forall x \exists y P(x, y, t) \to \exists y \forall x P(x, y)$ является свободным?

Вопрос 18. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $(\exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x Q(x, z)) \to \exists y \forall z R(y, z)$ является свободным?

Вопрос 19. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $(\exists x \forall z P(x, z) \to \exists y \exists z R(y, z)) \wedge \forall y \forall z \overline{S(x, y, z)}$ является свободным?

Вопрос 20. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $\left(\exists x \forall z P(x, z) \vee \exists x \exists y \overline{R(x, y)}\right) \to \forall z Q(z, x)$ является свободным?

Вопрос 21. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $(\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \vee \forall y Q(y, t)) \to \exists x \exists z S(x, z)$ является свободным?

Вопрос 22. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $\exists x \exists y P(x, y) \approx (Q(x) \to R(y))$ является свободным?

Вопрос 23. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $(\forall x \forall y P(x, y, z) \to \exists x \exists y \exists z R(x, y, z)) \to \exists z S(z)$ является свободным?

Вопрос 24. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $\overline{\forall x \exists y P(x, y)} \to (\forall y \forall z R(y, z, x) \to \overline{\forall z Q(z, t)})$ является свободным?

Вопрос 25. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $(\overline{\exists y P(x, y)} \to \exists x \exists y R(x, y)) \to \forall z S(z)$ является свободным?

Вопрос 26. Вхождение какой переменной в формулу логики предикатов $\exists x P(x, y) \wedge (\forall y \exists z R(y, z) \to \forall z S(y, z))$ является свободным?

Вопрос 27. Формула логики предикатов $\exists x\, P(x,\ y) \wedge \overline{Q(x)} \to$ $\to \forall x\, P(x, y)$ является:

а) простой;
б) открытой;
в) составной;
г) замкнутой.

Вопрос 28. Формула логики предикатов $\exists x\, A(x,\ y) \vee \exists y B(y)$ является:

а) простой;
б) открытой;
в) составной;
г) замкнутой.

Вопрос 29. Формула логики предикатов $\forall x\, Z(x,\ y) \to \exists x \forall y\, Z(x, y)$ является:

а) составной;
б) простой;
в) замкнутой;
г) открытой.

Вопрос 30. Формула логики предикатов $\exists x\, A(x,\ y) \vee \exists y B(y)$ является:

а) простой;
б) открытой;
в) составной;
г) замкнутой.

Вопрос 31. Пусть отношение ρ: «река x впадает в море y», тогда $x \in X$, где X – множество…

а) рек;

б) морей;

в) водоемов.

Вопрос 32. Формула логики предикатов $\exists x \exists y M(x,y,z) \wedge \overline{\overline{\forall x \exists z N(x,z)}}$ является:

а) простой;

б) открытой;

в) составной;

г) замкнутой.

Вопрос 33. В каком порядке выполняются шаги построения интерпретации замкнутой формулы логики предикатов?

а) Задается множество M.

б) Каждой предикатной букве, входящей в n-местный предикатный символ ставится в соответствие n-местный предикат, определенный на множестве M.

в) Каждому нуль-местному предикатному символу приписывается одно из значений истинности.

Вопрос 34. Какая из формул логики предикатов является общезначимой?

а) $\forall x A(x) \to \exists x A(x)$;

б) $\exists x \exists y M(x,y,z) \wedge \overline{\overline{\forall x \exists z N(x,z)}}$;

в) $\exists x A(x, y) \vee \exists y B(y)$.

Вопрос 35. Обращает ли в истинное высказывание формулу логики предикатов $\exists y \forall x P(x,y) \to (Q(x) \wedge R)$ следующая интерпретация?

1) $M = \{1, 2\}$;

2) $P(x, y)$: $P(1; 1) =$ И, $P(1; 2) =$ Л, $P(2; 1) =$ И, $P(2; 2) =$ Л; $Q(x)$: $Q(1) =$ И; $Q(2) =$ Л;

3) $R =$ И;

4) $x = 1$.

3. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ (Часть 1)

3.1. Правила выполнения и оформления расчетно-графического задания

При выполнении расчетно-графического задания (РГЗ) следует строго придерживаться указанных ниже правил.

Выбор варианта осуществляется в соответствии с последней цифрой учебного шифра студента. Номер варианта равен последней цифре. Цифра ноль соответствует варианту 10.

Решение задач следует располагать в порядке следования номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач и записывая исходные данные. Если несколько задач имеют общую формулировку, то при оформлении решения общие условия заменяют конкретными данными.

Приступая к выполнению РГЗ необходимо изучить теоретический материал и ознакомиться с практической частью пособия. Решения задач следует оформлять аккуратно, подробно объясняя ход решения. В конце работы необходимо привести список использованной литературы, указать дату выполнения работы и поставить свою подпись. Оформляется РГЗ в соответствии с требованиями РД ФГБОУ ВПО «КнАГТУ» 013-2013 «Текстовые студенческие работы. Правила оформления».

После получения проверенной работы необходимо исправить в ней отмеченные рецензентом ошибки и недочеты.

3.2. Задачи расчетно-графического задания (Часть 1)

Задание 1. Ниже приведены диаграммы Эйлера-Венна (рис. 3.1). Представьте заштрихованные области максимально компактными аналитическими выражениями, в которых бы использовалось минимальное количество операций и букв.

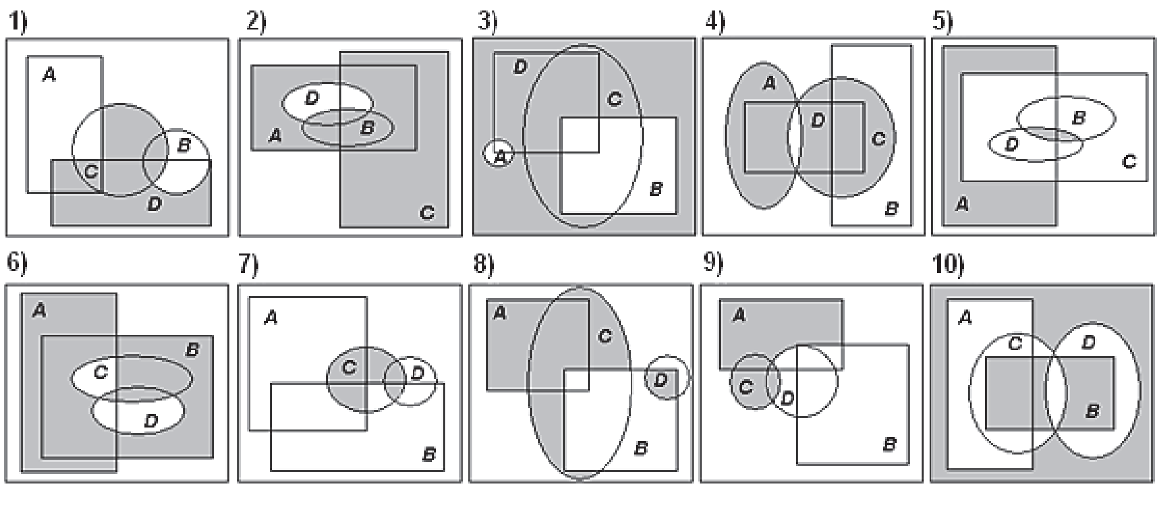


Рис. 3.1

Задание 2. Записать следующие высказывания в виде формул логики высказываний, используя пропозициональные (логические) переменные для обозначения элементарных высказываний, т.е. таких, которые уже не могут быть построены из каких-либо других высказываний.

1) *Пусть неверно, что если Джон – коммунист, то Джон – атеист; тогда Джон – коммунист или атеист, либо не является ни тем, ни другим.*

2) *Или Сэм пойдёт на вечеринку, и Макс не пойдёт на неё; или Сэм не пойдёт на вечеринку, и Макс отлично проведёт время.*

3) *Неверно, что ни Петров, ни Сидоров не выдержали экзамен.*

4) *Неверно, что если Иванов или Петров сдали экзамен, то и Сидоров его сдал.*

5) *Неверно, что ветер дует тогда и только тогда, когда нет дождя и светит солнце.*

6) *Джо получит приз в том и только в том случае, если он умён или если Джим глуп.*

7) *Неверно, что если Сидоров не кассир, то Сидоров убил кассира; следовательно, фамилия кассира – Сидоров.*

8) *Неверно, что и Петров, и Иванов не выдержали экзамена; значит, хотя бы один из них сдал экзамен.*

9) *Если завтра я получу стипендию или займу деньги у товарища и если магазин будет открыт, то я завтра куплю фотоаппарат нужной модели, если он будет в продаже.*

10) *Когда погода плохая, то или падает настроение, или портится самочувствие, и в обоих случаях не хочется работать.*

Задание 3. Используя равносильности логики высказываний, упростить исходную формулу. Для исходной формулы и упрощенной построить таблицу истинности.

1) $((A \vee \overline{B}) \wedge A) \to (\overline{C} \vee (\overline{A} \wedge C))$.

2) $(\overline{(A \vee B)} \wedge \overline{(A \wedge C)}) \to (A \approx B)$.

3) $(A \approx B) \to ((A \wedge C) \vee \overline{B})$.

4) $((A \to B) \wedge (B \approx C)) \to (A \vee C)$.

5) $((A \wedge B) \to C) \approx \overline{(A \vee C)}$.

6) $((A \to B) \vee \overline{B}) \approx ((A \wedge C) \to B)$.

7) $((A \wedge B) \to C) \vee (\overline{A} \approx (A \wedge C))$.

8) $(B \to C) \vee ((A \wedge B) \approx \overline{C})$.

9) $(A \wedge B) \to ((A \vee \overline{B}) \approx \overline{C})$.

10) $(A \wedge B) \vee ((\overline{A} \wedge C) \approx (B \to C))$.

Задание 4. Ниже приведена клауза. Необходимо выяснить при помощи алгоритма Вонга и метода резолюций, является ли клауза теоремой.

1) $A \to B, C \to D, B \to E, D \to F, \overline{E \wedge F}, A \to C \Rightarrow \overline{A}$.

2) $X \to Y, X \approx A, Y \approx B \Rightarrow A \to B$.

3) $X \to Y, Y \to Z, X \approx A, Z \approx B \Rightarrow A \to B$.

4) $A \vee B, A \to B, B \to (C \to \overline{D}), A \to D \Rightarrow \overline{A} \vee \overline{C}$.

5) $D \wedge B, D \to B, C \vee D, D \to C, C \to (B \to A) \Rightarrow A$.

6) $P \to Q, R \to S, (S \wedge Q) \to T, T \Rightarrow \overline{P} \vee \overline{R}$.

7) $B \to D, B \to A, A \vee B, A \to (B \vee C) \Rightarrow D \vee C$.

8) $\overline{C}, D \to C, A \to (\overline{B} \to D), B \to C \Rightarrow \overline{A}$.

9) $C \to (B \to A), \overline{B} \to D, C \Rightarrow A \vee D$.

10) $A \to (C \to B), D \to A, C \Rightarrow D \to B$.

Задание 5. В табл. 3.1 заданы номера наборов аргументов, на которых булева функция принимает значение, равное единице. Необходимо:

а) записать булеву функцию в СДНФ, СКНФ;

б) минимизировать функцию с помощью минимизационной карты;

в) выяснить, к каким функционально-замкнутым классам принадлежит булева функция.

Таблица 3.1

Номер варианта	Номера конституент
1	4, 6, 8, 9, 10, 11, 15
2	2, 3, 6, 7, 8, 14, 15
3	0, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11
4	1, 3, 5, 7, 8, 12, 14
5	1, 2, 5, 6, 10, 12, 13, 14
6	0, 3, 7, 9, 10, 12, 13, 14
7	0, 2, 5, 8, 10, 11, 14, 15
8	0, 1, 2, 4, 7, 10, 11, 12, 14
9	0, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 15
10	0, 1, 2, 3, 9, 12, 13, 14, 15

Задание 6. Разбить высказывание на элементарные и записать в виде кванторной формулы логики предикатов, используя наименьшее возможное число предикатов наименьшей местности. Привести формулу к предваренной нормальной форме.

1) *Сумма любых двух чисел, имеющих различную четность, есть число нечетное.*

2) *Через три любые точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.*

3) *Функция не имеет точек разрыва тогда и только тогда, когда функция непрерывна в любой точке области определения.*

4) *Через две различные точки проходит единственная прямая.*

5) *Два произвольных числа равны, если каждое из них делится на другое.*

6) *Функция возрастает на интервале, если в каждой точке этого интервала её первая производная положительна.*

7) *Через всякую точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.*

8) *Для любых двух различных действительных чисел найдется число, расположенное между ними.*

9) *Последовательность называется ограниченной, если существует такое число, что модуль любого члена последовательности не превосходит этого числа.*

10) *Функция дифференцируема на множестве, если она дифференцируема во всех точках этого множества.*

Задание 7. Построить интерпретацию формулы логики предикатов.

1) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$.

2) $(\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x Q(x)) \to \exists y \forall z R(y,z)$.

3) $(\exists x \forall z P(x,z) \to \exists y \exists z R(y,z)) \wedge \forall y \forall z \overline{S(y,z)}$.

4) $(\exists x \forall z P(x,z) \vee \exists x \exists y \overline{R(x,y)}) \to \forall z Q(z)$.

5) $(\forall x \exists y \forall z P(x,y,z) \vee \forall y Q(y)) \to \exists x \exists z S(x,z)$.

6) $\exists x \exists y P(x,y) \approx (Q(x) \to R(y))$.

7) $(\forall x \forall y P(x,y) \to \exists x \exists y \exists z R(x,y,z)) \to \exists z S(z)$.

8) $\overline{\forall x \exists y P(x,y)} \to (\forall y \forall z R(y,z) \to \overline{\forall z Q(z)})$.

9) $(\overline{\exists y P(y)} \to \exists x \exists y R(x,y)) \to \forall z S(z)$.

10) $\exists x P(x,y) \wedge (\forall y \exists z R(y,z) \to \forall z S(y,z))$.

3.3. Пример выполнения расчетно-графического задания (Часть 1)

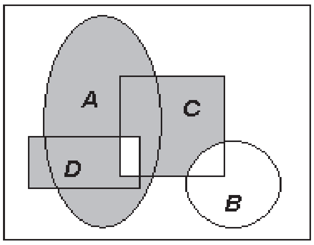


Рис. 3.2

Задание 1. Представьте заштрихованные области диаграммы Эйлера-Венна (рис. 3.2) максимально компактным аналитическим выражением, в котором используется минимальное количество операций и букв.

Решение.

На рис. 3.3 изображена диаграмма Эйлера-Венна, заштрихованные области которой соответствуют выражению $A \cup C \cup D$. На рис. 3.4 изображена диаграмма Эйлера-Венна, заштрихованные области которой соответствуют выражению $(D \cap C) \cup B$.

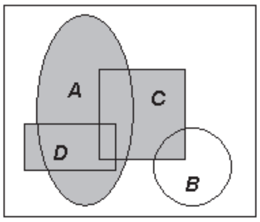


Рис. 3.3

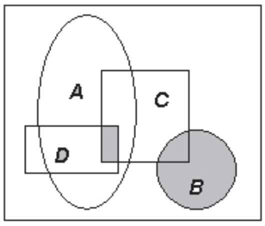


Рис. 3.4

Чтобы получить необходимое множество (см. рис. 3.2), необходимо вычесть из первого аналитического выражения второе. В результате получаем $(A \cup C \cup D) \setminus ((D \cap C) \cup B)$.

Задание 2. Записать высказывание в виде формулы логики высказываний, используя пропозициональные (логические) переменные для обозначения элементарных высказываний, т.е. таких, которые уже не могут быть построены из каких-либо других высказываний:

«Прядильный станок остановится, если оборвется нить хотя бы на одном из трех веретен».

Решение.

Введем обозначения:

a – «прядильный станок остановился»;

b – «нить оборвалась на первом веретене»;

c – «нить оборвалась на втором веретене»;

d – «нить оборвалась на третьем веретене».

Исходное высказывание содержит связку «если …, то …», которая соответствует импликации. Формула имеет вид

$$(b \vee c \vee d) \rightarrow a.$$

Задание 3. Используя равносильности логики высказываний, упростить исходную формулу

$$(a \wedge c) \to ((a \wedge b) \approx (c \vee \overline{a})).$$

Для исходной формулы и упрощенной построить таблицу истинности.

Решение.

$$(a \wedge c) \to ((a \wedge b) \approx (c \vee \overline{a})) \equiv \overline{(a \wedge c)} \vee ((a \wedge b) \approx (c \vee \overline{a})) \equiv$$
$$\equiv \overline{a} \vee \overline{c} \vee (((a \wedge b) \wedge (c \vee \overline{a})) \vee (\overline{a \wedge b} \wedge \overline{c \vee \overline{a}})) \equiv$$
$$\equiv \overline{a} \vee \overline{c} \vee ((b \wedge (a \wedge (c \vee \overline{a}))) \vee (((\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge a) \wedge \overline{c})) \equiv$$
$$\equiv \overline{a} \vee \overline{c} \vee ((b \wedge a \wedge c) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c})) \equiv (\overline{a} \vee (a \wedge b \wedge c)) \vee (\overline{c} \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c})) \equiv$$
$$\equiv \overline{a} \vee (b \wedge c) \vee \overline{c} \equiv \overline{a} \vee \overline{c} \vee b.$$

Введем обозначения: $F_1 \equiv (a \wedge c) \to ((a \wedge b) \approx (c \vee \overline{a}))$, $F_2 \equiv \overline{a} \vee \overline{c} \vee b$.

Построим таблицу истинности для F_1 и F_2 (табл. 3.2).

Таблица 3.2

№ набора	a	b	c	$a \wedge c$	$a \wedge b$	$\overline{a}$	$c \vee \overline{a}$	$(a \wedge b) \approx (c \vee \overline{a})$	$\boldsymbol{F_1}$	$\overline{a}$	$\overline{c}$	b	$\boldsymbol{F_2}$
0	0	0	0	0	0	1	1	0	**1**	1	1	0	**1**
1	0	0	1	0	0	1	1	0	**1**	1	0	0	**1**
2	0	1	0	0	0	1	1	0	**1**	1	1	1	**1**
3	0	1	1	0	0	1	1	0	**1**	1	0	1	**1**
4	1	0	0	0	0	0	0	1	**1**	0	1	0	**1**
5	1	0	1	1	0	0	1	0	**0**	0	0	0	**0**
6	1	1	0	0	1	0	0	0	**1**	0	1	1	**1**
7	1	1	1	1	1	0	1	1	**1**	0	0	1	**1**

Столбцы, соответствующие F_1 и F_2, совпадают. Это значит, что аналитические преобразования исходной формулы верны.

Задание 4. Ниже приведена клауза

$$A \to (B \vee C), A \vee B, B \to A, B \to D \Rightarrow C \vee D.$$

Необходимо выяснить при помощи алгоритма Вонга и метода резолюций, является ли клауза теоремой.

Решение.

Метод Вонга.

Построим дерево доказательства (рис. 3.5).

Все ветви дерева заканчиваются клаузами, в которых по обеим сторонам символа $\Rightarrow$ присутствует одна и та же буква. Следовательно, логическая теорема верна.

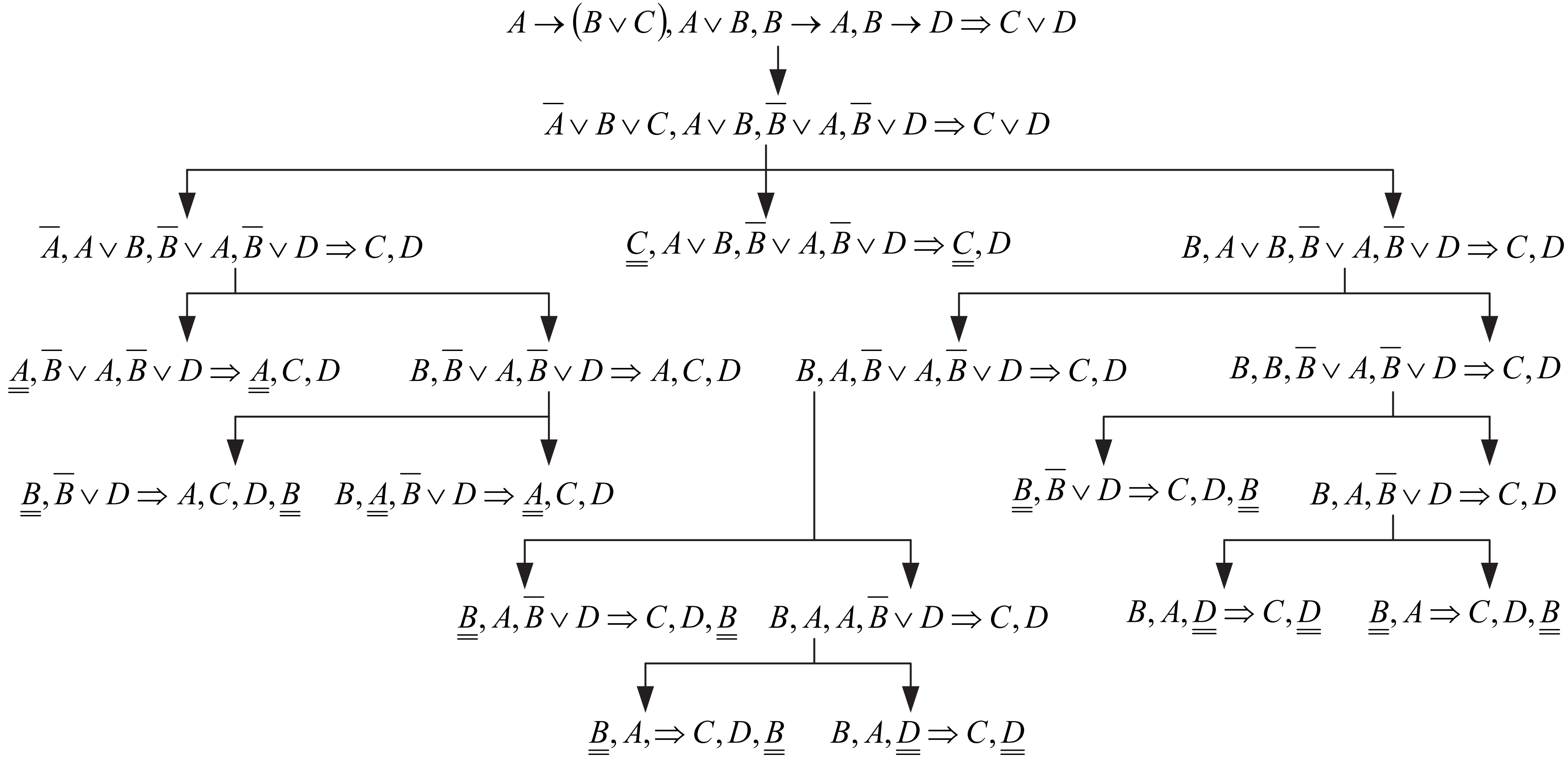

$A \to (B \vee C), A \vee B, B \to A, B \to D \Rightarrow C \vee D$
$\overline{A} \vee B \vee C, A \vee B, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C \vee D$
$\overline{A}, A \vee B, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D$
$\underline{\underline{C}}, A \vee B, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow \underline{\underline{C}}, D$
$B, A \vee B, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D$
$\underline{\underline{A}}, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow \underline{\underline{A}}, C, D$
$B, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow A, C, D$
$B, A, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D$
$B, B, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D$
$\underline{\underline{B}}, \overline{B} \vee D \Rightarrow A, C, D, \underline{\underline{B}}$
$B, \underline{\underline{A}}, \overline{B} \vee D \Rightarrow \underline{\underline{A}}, C, D$
$\underline{\underline{B}}, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D, \underline{\underline{B}}$
$B, A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D$
$\underline{\underline{B}}, A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D, \underline{\underline{B}}$
$B, A, A, \overline{B} \vee D \Rightarrow C, D$
$B, A, \underline{\underline{D}} \Rightarrow C, \underline{\underline{D}}$
$\underline{\underline{B}}, A \Rightarrow C, D, \underline{\underline{B}}$
$\underline{\underline{B}}, A, \Rightarrow C, D, \underline{\underline{B}}$
$B, A, \underline{\underline{D}} \Rightarrow C, \underline{\underline{D}}$

Рис. 3.5

Метод резолюций.

Необходимо преобразовать клаузу

$$A \to (B \vee C), A \vee B, B \to A, B \to D \Rightarrow C \vee D.$$

таким образом, чтобы после знака $\Rightarrow$ получился ноль, при этом избавимся от импликации:

$$\overline{A} \vee B \vee C, A \vee B, \overline{B} \vee A, \overline{B} \vee D, \overline{C}, \overline{D} \Rightarrow \varnothing.$$

Выпишем по порядку все посылки и далее начнем их «склеивать»:

1)	$\overline{A} \vee B \vee C$	7)	(2; 3) A
2)	$A \vee B$	8)	(4; 6) $\overline{B}$
3)	$\overline{B} \vee A$	9)	(1; 7) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4)	$\overline{B} \vee D$	10)	(9; 5) B
5)	$\overline{C}$	11)	(10; 8) $\varnothing$
6)	$\overline{D}$		

Иначе, порядок «склеивания» можно представить в виде цепочки равносильных преобразований:

$$(\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (A \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A) \wedge (\overline{B} \vee D) \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \equiv$$

$$\equiv (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge ((A \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)) \wedge ((\overline{B} \vee D) \wedge \overline{D}) \wedge \overline{C} \equiv$$

$$\equiv (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge A \wedge \overline{B} \wedge \overline{D} \wedge \overline{C} \equiv ((\overline{A} \vee B \vee C) \wedge A) \wedge \overline{B} \wedge \overline{D} \wedge \overline{C} \equiv$$

$$\equiv ((B \wedge A) \vee (A \wedge C)) \wedge \overline{B} \wedge \overline{D} \wedge \overline{C} \equiv (((B \wedge A) \vee (A \wedge C)) \wedge \overline{C}) \wedge \overline{B} \wedge \overline{D} \equiv$$

$$\equiv ((A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge C \wedge \overline{C})) \wedge \overline{B} \wedge \overline{D} \equiv A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{B} \wedge \overline{D} \equiv \varnothing.$$

Задание 5. Заданы номера наборов аргументов, на которых булева функция принимает значение, равное единице. Необходимо:

а) записать булеву функцию в СДНФ, СКНФ;

б) минимизировать функцию с помощью минимизационной карты;

в) выяснить, к каким функционально-замкнутым классам принадлежит булева функция.

Дана функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0011010111001010$.

Решение.

а) Запишем СДНФ и СКНФ булевой функции.

СДНФ (1): № 2, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 14:

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee$$

$$\vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}.$$

СКНФ (0): № 0, 1, 4, 6, 10, 11, 13, 15:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge$$
$$\wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4).$$

б) Построим минимизационную карту (табл. 3.3) и пошагово выполним алгоритм.

Шаг 1.

Таблица 3.3

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	1
8	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	1
10	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	10	0
11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	0
14	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	0

Шаг 2. Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в ноль.

Шаг 3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге.

Шаг 4. В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их.

Шаг 5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного.

Результирующая таблица имеет следующий вид (табл. 3.4).

Шаг 6. Сокращенная ДНФ имеет вид

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\ .$$

Таблица 3.4

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
2	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**2**	**2**	**2**	**1**
3	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**1**
4	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**2**	**2**	**0**	**4**	**4**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**	**5**	**1**
6	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**3**	**2**	**2**	**3**	**2**	**2**	**6**	**6**	**0**
7	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**7**	**7**	**1**
8	**1**	**0**	**0**	**0**	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**4**	**4**	**4**	**0**	**8**	**1**
9	**1**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**3**	**0**	**1**	**1**	**4**	**5**	**5**	**1**	**9**	**1**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**3**	**2**	**1**	**0**	**2**	**5**	**4**	**6**	**2**	**10**	**0**
11	**1**	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**3**	**1**	**1**	**3**	**5**	**5**	**7**	**3**	**11**	**0**
12	**1**	**1**	**0**	**0**	**3**	**2**	**2**	**2**	**2**	**0**	**6**	**6**	**4**	**4**	**12**	**1**
13	**1**	**1**	**0**	**1**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**1**	**6**	**7**	**5**	**5**	**13**	**0**
14	**1**	**1**	**1**	**0**	**3**	**3**	**2**	**3**	**2**	**2**	**7**	**6**	**6**	**6**	**14**	**1**
15	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**7**	**7**	**7**	**7**	**15**	**0**

Строим матрицу покрытий (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Слагаемые сокращенной ДНФ	Простые импликанты				Конституенты единицы функции f							
	x_1	x_2	x_3	x_4	0010	0011	0101	0111	1000	1001	1100	1110
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	0	0	1	-	**1**	**1**						
$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	1	0	0	-					**1**	**1**		
$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	0	1	-	1			**1**	**1**				
$x_1\,x_2\,\overline{x_4}$	1	1	-	0							**1**	**1**
$\overline{x_1}\,x_3\,x_4$	0	-	1	1		**1**		**1**				
$x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	1	-	0	0					**1**		**1**	

Последовательно выбираем слагаемые 1, 2, 3, 4.
В результате получаем МДНФ

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_4}\,.$$

в) Построим таблицу значений функции (табл. 3.6). Выясним, к каким функционально замкнутым классам она принадлежит:

1) $f(0, 0, 0, 0) = 0$, значит, $f \in T_0$.

2) $f(1, 1, 1, 1) = 0$, значит, $f \notin T_1$.

3) $f(0, 0, 0, 0) = f(1, 1, 1, 1) = 0$, значит, $f \notin S$.

4) Поскольку набор (1, 1, 1) больше любого другого набора и $f(0, 0, 1, 0) = 1$, $f(1, 1, 1, 1) = 0$, то $f \notin M$.

Для того чтобы выяснить, является ли функция линейной, построим многочлен Жегалкина (с помощью треугольника Паскаля) (табл. 3.7).

Таблица 3.6

№ набора	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

Таблица 3.7

Слагаемое	x_1	x_2	x_3	x_4	f	Δ Паскаля
1	0	0	0	0	0	$f =$ 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0
x_4	0	0	0	1	0	0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1
x_3	0	0	1	0	1	1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0
x_3x_4	0	0	1	1	1	0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0
x_2	0	1	0	0	0	0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0
x_2x_4	0	1	0	1	1	1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1
x_2x_3	0	1	1	0	0	1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
$x_2x_3x_4$	0	1	1	1	1	0 1 0 1 0 1 0 1 0
x_1	1	0	0	0	1	1 1 1 1 1 1 1 1
x_1x_4	1	0	0	1	1	0 0 0 0 0 0 0
x_1x_3	1	0	1	0	0	0 0 0 0 0 0
$x_1x_3x_4$	1	0	1	1	0	0 0 0 0 0
x_1x_2	1	1	0	0	1	0 0 0 0
$x_1x_2x_4$	1	1	0	1	0	0 0 0
$x_1x_2x_3$	1	1	1	0	1	0 0
$x_1x_2x_3x_4$	1	1	1	1	0	0

Полином Жегалкина имеет вид

$$f = x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_3 + x_1, \quad f \notin L.$$

Сведем полученные данные:

	T_0	T_1	S	L	M
f	+	-	-	-	-

Задание 6. Разбить высказывание на элементарные и записать в виде кванторной формулы логики предикатов, используя наименьшее возможное число предикатов наименьшей местности. Привести формулу к предваренной нормальной форме.

Для любого натурального числа найдется число больше данного, которое тоже является натуральным.

Решение.

1) Введем обозначения:

$P(x)$: *«число x – натуральное»,* $x \in R$, где R – множество действительных чисел; $Q(x, y)$: *«$x < y$»*, где $(x, y) \in R \times R$.

Исходное выражение можно записать в виде следующей формулы:

$$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge Q(x, y))).$$

2) Сначала приведем формулу к приведенной нормальной форме, т.е. избавимся от знака импликации, используя равносильности логики высказываний и логики предикатов:

$$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge Q(x, y))) \equiv \forall x\left(\overline{P(x)} \vee \exists y(P(y) \wedge Q(x, y))\right).$$

Для приведения к предваренной нормальной форме необходимо вынести все кванторы в начало формулы (используя равносильности логики предикатов):

$$\forall x\left(\overline{P(x)} \vee \exists y(P(y) \wedge Q(x, y))\right) \equiv \forall x \exists y\left(\overline{P(x)} \vee (P(y) \wedge Q(x, y))\right).$$

Задание 7. Построить интерпретацию формулы логики предикатов:

$$\forall x P(x, y) \to \left(\exists z \overline{Q(z)} \wedge \forall y R(y) \wedge S\right).$$

Решение.

Данная формула является открытой (первое вхождение переменной y не связано квантором), и формула содержит нульместный предикат (S). Значит, интерпретация будет состоять из четырех шагов:

1) Зададим множество, на котором будем рассматривать все предикаты: $M = R$, где R – множество действительных чисел.

2) Каждой предикатной букве ставим в соответствие предикат: $P(x, y)$: «$x < y$»; $Q(z)$: «*z – четное число*»; $R(y)$: «*делителем y является единица*».

3) Нульместному предикату припишем значение И.

4) Свободному вхождению переменной y припишем значение 0.

При данной интерпретации высказывание $\forall x P(x, y)$ является ложным (читается: «любое действительное число x меньше $y = 0$»), $\exists z \overline{Q(z)}$ – истинное высказывание (читается: «существует действительное число z, которое не является четным»), $\forall yR(y)$ – истинное высказывание (читается: «любое действительное число y делится на единицу без остатка»), S – истинное высказывание. В результате получили высказывание, которое можно записать: $0 \to (1 \wedge 1 \wedge 1) \equiv 1$.

Значит, данная интерпретация обращает формулу логики предикатов в истинное высказывание.

4. КЛЮЧИ К ПРОВЕРОЧНЫМ ТЕСТАМ

4.1. Ключ к проверочному тесту по теме «Теория множеств»

Вопрос 1. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 2. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 3. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 4. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 5. Коэффициент сложности 6	Ответ: 16
Вопрос 6. Коэффициент сложности 6	Ответ: 4
Вопрос 7. Коэффициент сложности 6	Ответ: 8
Вопрос 8. Коэффициент сложности 6	Ответ: 2
Вопрос 9. Коэффициент сложности 6	Ответ: 16
Вопрос 10. Коэффициент сложности 6	Ответ: 32
Вопрос 11. Коэффициент сложности 6	Ответ: 2
Вопрос 12. Коэффициент сложности 6	Ответ: 8

Вопрос 13. Коэффициент сложности 6	Ответ: 4
Вопрос 14. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1
Вопрос 15. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
Вопрос 16. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{0, 3, 7, 8\}$
Вопрос 17. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{0, 3, 7, 8, 9, 10\}$
Вопрос 18. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{3, 4, 7, 8\}$
Вопрос 19. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
Вопрос 20. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{1, 2, 5, 6\}$
Вопрос 21. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{9, 10\}$
Вопрос 22. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
Вопрос 23. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
Вопрос 24. Коэффициент сложности 6	Ответ: $M = \{3, 4, 7, 8\}$
Вопрос 25. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 26. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 27. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 28. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 29. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в

Вопрос 30. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 31. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 32. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 33. Коэффициент сложности 1	Ответ: б) пустое
Вопрос 34. Коэффициент сложности 1	Ответ: г) $\lvert\varnothing\rvert = 0$
Вопрос 35. Коэффициент сложности 1	Ответ: в) равномощными
Вопрос 36. Коэффициент сложности 1	Ответ: а) подмножеством множества *B*
Вопрос 37. Коэффициент сложности 1	Ответ: а) множество всех возможных подмножеств исходного множества
Вопрос 38. Коэффициент сложности 1	Ответ: в) перечисление
Вопрос 39. Коэффициент сложности 2	Ответ: 3
Вопрос 40. Коэффициент сложности 2	Ответ: 5
Вопрос 41. Коэффициент сложности 2	Ответ: 3
Вопрос 42. Коэффициент сложности 2	Ответ: 1
Вопрос 43. Коэффициент сложности 2	Ответ: 6
Вопрос 44. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) объединением множеств *A* и *B*
Вопрос 45. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) объединением множеств *A* и *B*
Вопрос 46. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) пересечением множеств *A* и *B*

Вопрос 47. Коэффициент сложности 5	Ответ: в) разностью множеств A и B
Вопрос 48. Коэффициент сложности 5	Ответ: г) симметрической разностью множеств A и B
Вопрос 49. Коэффициент сложности 4	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 50. Коэффициент сложности 4	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 51. Коэффициент сложности 4	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 52. Коэффициент сложности 4	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 53. Коэффициент сложности 4	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 54. Коэффициент сложности 10	Ответ: 1, 2, 3, 4, 5
Вопрос 55. Коэффициент сложности 10	Ответ: 3, 4, 5, 6, 7
Вопрос 56. Коэффициент сложности 9	Ответ: а)$\{1, 2, 3, 4, 5\}$; в) $\{a, b, c, d, e\}$; г) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$
Вопрос 57. Коэффициент сложности 3	Ответ: а); б); в)
Вопрос 58. Коэффициент сложности 7	Ответ: а); б); в); г); д); е)
Вопрос 59. Коэффициент сложности 11	Ответ: а); б); в)

4.2. Ключ к проверочному тесту по теме «Бинарные отношения и алгебраические операции»

Вопрос 1. Коэффициент сложности 5	Ответ: в) транзитивность
Вопрос 2. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) рефлексивность; б) симметричность; в) транзитивность; г) отношение эквивалентности
Вопрос 3. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) симметричность
Вопрос 4. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) рефлексивность; в) транзитивность
Вопрос 5. Коэффициент сложности 5	Ответ: в) транзитивность
Вопрос 6. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) рефлексивность; в) транзитивность
Вопрос 7. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) рефлексивность; б) симметричность; в) транзитивность; г) отношение эквивалентности
Вопрос 8. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) рефлексивность; б) симметричность; в) транзитивность; г) отношение эквивалентности
Вопрос 9. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) рефлексивность; б) симметричность; в) транзитивность; г) отношение эквивалентности
Вопрос 10. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) симметричность
Вопрос 11. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 12. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 13. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в

Вопрос 14. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 15. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 16. Коэффициент сложности 9	Ответ: в) биекция
Вопрос 17. Коэффициент сложности 1	Ответ: б) отношением эквивалентности
Вопрос 18. Коэффициент сложности 1	Ответ: в) рефлексивное
Вопрос 19. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) {<5,1>, <5,0>, <6,1>, <6,0>, <7,1>, <7,0>};
Вопрос 20. Коэффициент сложности 1	Ответ: а) отношением частичного порядка
Вопрос 21. Коэффициент сложности 1	Ответ: г) не зависит от расстановки скобок
Вопрос 22. Коэффициент сложности 1	Ответ: б) симметричное
Вопрос 23. Коэффициент сложности 1	Ответ: г) транзитивное
Вопрос 24. Коэффициент сложности 1	Ответ: г) инъективна и сюръективна
Вопрос 25. Коэффициент сложности 5	Ответ: в) (4,5), (4,6), (5,5), (5,6)
Вопрос 26. Коэффициент сложности 6	Ответ: инъекция
Вопрос 27. Коэффициент сложности 6	Ответ: сюръекция
Вопрос 28. Коэффициент сложности 9	Ответ: б) сюръекция
Вопрос 29. Коэффициент сложности 9	Ответ: г) не является ни инъекцией, ни сюръекцией
Вопрос 30. Коэффициент сложности 2	Ответ: функция

Вопрос 31. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 32. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 33. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 34. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в

4.3. Ключ к проверочному тесту по теме «Логика высказываний»

Вопрос 1. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 2. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 3. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 4. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 5. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 6. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 7. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 8. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 9. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 10. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 11. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в

Вопрос 12. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1
Вопрос 13. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1
Вопрос 14. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1
Вопрос 15. Коэффициент сложности 6	Ответ: 0
Вопрос 16. Коэффициент сложности 6	Ответ: 0
Вопрос 17. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1
Вопрос 18. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1
Вопрос 19. Коэффициент сложности 6	Ответ: 0
Вопрос 20. Коэффициент сложности 6	Ответ: 0
Вопрос 21. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1
Вопрос 22. Коэффициент сложности 1	Ответ: г) 0
Вопрос 23. Коэффициент сложности 1	Ответ: а) да
Вопрос 24. Коэффициент сложности 1	Ответ: а) 0
Вопрос 25. Коэффициент сложности 1	Ответ: а) логическая операция, которая истинна только тогда, когда исходное высказывание ложно
Вопрос 26. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) да
Вопрос 27. Коэффициент сложности 1	Ответ: а) легенда
Вопрос 28 Коэффициент сложности 5	Ответ: в) $a \approx b$

Вопрос 29. Коэффициент сложности 2	Ответ: 0
Вопрос 30. Коэффициент сложности 1	Ответ: да
Вопрос 31. Коэффициент сложности 1	Ответ: 0
Вопрос 32. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 33. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 34. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в

4.4. Ключ к проверочному тесту по теме «Булевы функции»

Вопрос 1. Коэффициент сложности 2	Ответ: 1101
Вопрос 2. Коэффициент сложности 2	Ответ: 0001
Вопрос 3. Коэффициент сложности 2	Ответ: 0110
Вопрос 4. Коэффициент сложности 2	Ответ: 1001
Вопрос 5. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1110
Вопрос 6. Коэффициент сложности 6	Ответ: 0111
Вопрос 7. Коэффициент сложности 6	Ответ: 0110
Вопрос 8. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1001
Вопрос 9. Коэффициент сложности 6	Ответ: 1011

Вопрос 10. Коэффициент сложности 6	Ответ: 0110
Вопрос 11. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = 1 + x_1 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3$
Вопрос 12. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = x_1x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3$
Вопрос 13. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = 1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3$
Вопрос 14. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_2x_3 +$ $+ x_1x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3$
Вопрос 15. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = 1 + x_1x_3 + x_1x_2x_3$
Вопрос 16. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = 1 + x_3 + x_2 + x_2x_3 + x_1$
Вопрос 17. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = 1 + x_2x_3 + x_1$
Вопрос 18. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = x_3 + x_2 + x_2x_3 + x_1$
Вопрос 19. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = 1 + x_1 + x_1x_3 + x_1x_2$
Вопрос 20. Коэффициент сложности 6	Ответ: $f = 1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3$
Вопрос 21. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$
Вопрос 22. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3$
Вопрос 23. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$
Вопрос 24. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}$
Вопрос 25. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$
Вопрос 26. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \underline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3$

Вопрос 27. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3$
Вопрос 28. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\overline{x_1}x_2\underline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$
Вопрос 29. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3}$
Вопрос 30. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3$
Вопрос 31. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$
Вопрос 32. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)$
Вопрос 33. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)$
Вопрос 34. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)$
Вопрос 35. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$
Вопрос 36. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$
Вопрос 37. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)$
Вопрос 38. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$
Вопрос 39. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)$
Вопрос 40. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $f=\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$
Вопрос 41. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0
Вопрос 42. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0
Вопрос 43. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0; б) T_1; в) M

Вопрос 44. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0
Вопрос 45. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0
Вопрос 46. Коэффициент сложности 5	Ответ: г) S
Вопрос 47. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0; б) T_1; в) M; г) S
Вопрос 48. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0; в) M
Вопрос 49. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) T_1 ; в) M
Вопрос 50. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0; б) T_1; в) M; г) S
Вопрос 51. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) T_0; б) T_1; в) M; г) S
Вопрос 52. Коэффициент сложности 4	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 53. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 54. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 55. Коэффициент сложности 8	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 56. Коэффициент сложности 7	Ответ: а); б); в)
Вопрос 57. Коэффициент сложности 11	Ответ: а); б); в); г); д); е)

4.5. Ключ к проверочному тесту по теме «Логика предикатов»

Вопрос 1. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) $\left(\exists x\forall yP(x,y)\vee\exists xQ(x,z)\right)\to\exists y\forall zR(y,z)$
Вопрос 2. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $\left(\exists x\forall zP(x,z)\vee\exists x\exists y\overline{R(x,y)}\right)\to\forall zQ(z,x)$
Вопрос 3. Коэффициент сложности 5	Ответ: в) $\exists x\exists yP(x,y)\approx\left(Q(x)\to R(y)\right)$
Вопрос 4. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $\overline{\forall x\exists yP(x,y)}\to\left(\forall y\forall zR(y,z,x)\to\overline{\forall zQ(z)}\right)$
Вопрос 5. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $\exists xP(x,y)\wedge\left(\forall y\exists zR(y,z)\to\forall zS(y,z)\right)$
Вопрос 6. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $\forall x\exists yP(x,y)\to\exists y\forall xP(x,y)$
Вопрос 7. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) $\left(\exists x\forall zP(x,z)\to\exists y\exists zR(y,z)\right)\wedge\forall y\forall z\overline{S(y,z)}$
Вопрос 8. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) $\left(\forall x\exists y\forall zP(x,y,z)\vee\forall yQ(y)\right)\to\exists x\exists zS(x,z)$
Вопрос 9. Коэффициент сложности 5	Ответ: в) $\left(\forall x\forall yP(x,y)\to\exists x\exists y\exists zR(x,y,z)\right)\to\exists zS(z)$
Вопрос 10. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) $\left(\overline{\exists yP(y)}\to\exists x\exists yR(x,y)\right)\to\forall zS(z)$
Вопрос 11. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 12. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 13. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 14. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 15. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в
Вопрос 16. Коэффициент сложности 12	Ответ: 1 – а, 2 – б, 3 – в

Вопрос 17. Коэффициент сложности 6	Ответ: t
Вопрос 18. Коэффициент сложности 6	Ответ: z
Вопрос 19. Коэффициент сложности 6	Ответ: x
Вопрос 20. Коэффициент сложности 6	Ответ: x
Вопрос 21. Коэффициент сложности 6	Ответ: t
Вопрос 22. Коэффициент сложности 6	Ответ: x, y
Вопрос 23. Коэффициент сложности 6	Ответ: z
Вопрос 24. Коэффициент сложности 6	Ответ: x
Вопрос 25. Коэффициент сложности 6	Ответ: x
Вопрос 26. Коэффициент сложности 6	Ответ: y
Вопрос 27. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) открытой
Вопрос 28. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) открытой
Вопрос 29. Коэффициент сложности 5	Ответ: г) открытой
Вопрос 30. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) открытой
Вопрос 31. Коэффициент сложности 5	Ответ: а) рек
Вопрос 32. Коэффициент сложности 5	Ответ: б) открытой
Вопрос 33. Коэффициент сложности 3	Ответ: а); б); в)

Вопрос 34. Коэффициент сложности 9	Ответ: а) $\forall x\, A(x) \to \exists x A(x)$
Вопрос 35. Коэффициент сложности 10	Ответ: да

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понимание основных положений теории множеств поможет в будущем молодым специалистам видеть общее между элементами окружающего мира, рассматривать их как отдельные множества и даст более глубокое понимание операций над множествами, что позволит на математическом строгом языке анализировать происходящие или требуемые преобразования.

Понятия теории множеств могут быть положены в основу системного анализа, т.к. именно множество является одним из основополагающих элементов системы. Понимание основных положений математической логики является фундаментом для функционально-логического программирования и баз данных, т.к. именно математическая логика является математическим аппаратом для указанных областей.

Математическая логика, как показывает практика, является мощнейшим инструментом формализации и предопределяет успешное решение, казалось бы, не математических проблем. Именно строгий язык логики помогает при решении многофакторных и вариативных ситуаций найти и обосновать все возможные варианты решения, при этом опираясь только на факты, отсекая всяческие эмоции.

Методы, рассмотренные в разделе математической логики, могут быть использованы в различных областях жизни, что доказывается разнообразностью приведенных в пособии примеров.

Необходимо понимать, что в пособии приведены лишь основы теории множеств и математической логики. Но автор надеется, что каждый, кто изучил пособие, получил достаточную базу для углубления и расширения своих познаний в области дискретной математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акимов, О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376 с.

2. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 545 с.

3. Воротников, С. М. Введение в математическую логику : методические указания и задания к контрольным работам / С. М. Воротников. – Комсомольск-на-Амуре : Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, 1996. – 128 с.

4. Горский, Д. П. Краткий словарь по логике / Д. П. Горский, А. А. Ивин, А. Л. Никифоров. – М. : Просвещение, 1991. – 208 с.

5. Иванов, Б. Н. Дискретная математика: алгоритмы и программы / Б. Н. Иванов. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 282 с.

6. Лихтарников, Л. М. Первое знакомство с математической логикой / Л. М. Лихтарников. – СПБ. : Лань, 1997. – 109 с.

7. Москинова, Г. И. Дискретная математика: математика для менеджера / Г. И. Москинова. – М. : Логос, 2000. – 240 с.

8. Набебин, А. А. Логика и пролог в дискретной математике / А. А. Набебин. – М. : Изд-во МЭИ, 1996. – 452 с.

9. Нефедов, В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

10. Никольская, И. Л. Математическая логика : учеб. / И. Л. Никольская. – М. : Высш. шк., 1981. – 127 с.

11. Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. – 3-е изд. – СПБ. : Питер, 2009. – 384 с.

12. Суворов, О. В. Основы логики / О. В. Суворов. – М. : Аквариум, 1997. – 128 с.

13. Шапиро, С. В. Решение логических и игровых задач / С. В. Шапиро. – М. : Радио и связь, 1984. – 152 с.

14. Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учеб. / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – 2-е изд., перераб. – М. : ИНФРА-М ; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 255 с.

15. Горбатов, В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В. А. Горбатов. – М. : Наука, Физматлит, 2000. – 544 с.

Учебное издание

Некрасова Марина Геннадьевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Научный редактор – канд. физ.-мат. наук, доцент А. Ю. Лошманов

Редактор Т. Н. Карпова

Подписано в печать 28.10.2013.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага 65 г/м^2. Ризограф EZ570E.
Усл. печ. л. 8,83. Уч.-изд. л. 8,60. Тираж 75 экз. Заказ 25850.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.